DIE BEDEUTUNG DER NICHTEUKLIDISCHEN GEOMETRIE FÜR DIE GRUNDLEHREN DER MECHANIK UND IHRE ENTWICKLUNG.

INAUGURALDISSERTATION
ZUR ERLANGUNG DER DOKTORWÜRDE
DER HOHEN PHILOSOPHISCHEN FAKULTÄT
DER VEREINIGTEN FRIEDRICHS-UNIVERSITÄT
HALLE-WITTENBERG

R. UNIV.
BIBLIOTHEEK
LEIDEN

VORGELEGT VON

ELISABETH PADERSTEIN
AUS BERLIN.

HALLE A. D. SAALE 1918.
DRUCK VON ROBERT NOSKE, BORNA-LEIPZIG
GROSSBETRIEB FÜR DISSERTATIONSDRUCK

Tag der mündlichen Prüfung: 28. November 1917.

Referent: Herr Geheimrat Prof. Dr. Wangerin.

Meiner Mutter!

Inhaltsverzeichnis.

Seite

Einleitung.

Die Abhängigkeit der Mechanik von den Geometrien . . . 1

Ausführung.

I. Größen, die unabhängig von der zugrunde gelegten Geometrie sind 4

II. Nichteuklidische Mechanik in historischer Entwicklung 7

III. Zusammenstellung der bisher gefundenen Gesetze der nichteuklidischen Mechanik 48

Schluß und Ausblick 73

Digitized by the Internet Archive
in 2026

https://archive.org/details/IA41534918_0016

Literaturverzeichnis.

d'Alembert, Addition au mémoire sur la courbe qui forme une corde tendue, mise en vibration. (Histoire de l'Académie royale des Sciences. t. 6. Berlin 1750.)

d'Alembert, Mémoire sur les principes de la mécanique. (Histoire de l'Académie royale des Sciences. Paris 1772.)

d'Alembert, Opuscules mathématiques. t. VI. Paris 1773.

Andrade, J., Statique non-euclidienne. (Verhandl. d. 1. intern. Kongr. Zürich 1897.)

Andrade, J., Sur la réduction des vecteurs et les propriétés métriques. (Comptes rendus. t. 125. 1897.)

Andrade, J., Le groupe d'équivalence et ses bases cynématiques. (Comptes rendus. t. 126. 1898.)

Andrade, J., Leçons de mécanique physique. Paris 1898.

Barfuß, Über die naturphilosophischen Prinzipien der Bewegungslehre. (Archiv f. Math. und Phys. Bd. 5. 1844.)

Blaschke, W., Euklidische Kinematik und nichteuklidische Geometrie. (Zeitschr. f. Math. u. Phys. 60. 1912.)

Beltrami, Saggio d'interpretazione della geometria non euclidea. (Giorn. di math. t. VI. 1868.)

Beltrami, Teoria fondamentale degli spazii di curvatura costante. (Ann. di math. (2) t. II. 1868/69.)

Beltrami, Essai d'interprétation de la géometrie non-euclidienne (Übers. von Houël. Ann. scient. de l'ecole norm. sup. t. VI. 1869.)

Beltrami, Formules fondamentales de cynématique dans les espaces de courbure constante. (Übers. von Houël. Bull. des Sciences math. et astron. t. X. 1876.)

Bertrand, Théorème relatif au mouvement d'un point, attiré vers un centre fixe. (Comptes rendus 77. 1873.)

Bonola, Die nichteuklidische Geometrie. Leipzig und Berlin 1908.

Byk, Zur Theorie der elektrischen und chemischen Atomkräfte. (Ann. d. Physik. 4. Folge. Bd. 42. 1913.)

Caley, A sixth memoir upon quantics. (Philos. Transactions. vol. 149. 1859.)

Cantor, Vorlesungen über Geschichte der Mathematik. III. Leipzig 1898.

Chwolson, O. D., Lehrbuch der Physik. I. Braunschweig 1902.

Delambre, Notice sur la vie et les ouvrages de M. Le Comte J.-L. Lagrange. (Lagrange Oeuvres. Paris 1867.)

Dippe, Über den Satz vom Parallelogramm der Kräfte. (Arch. f. Math. u. Phys. Bd. 3. 1843.)

Dühring, Kritische Geschichte der allgemeinen Prinzipien der Mechanik. 3. Aufl. Leipzig 1887.)

Engel u. **Stäckel,** Urkunden zur Geschichte der nichteuklidischen Geometrie I. Nikolaj Iwanowitsch Lobatchewsky: 2 geometrische Abhandlungen aus dem Russischen übersetzt. Leipzig 1898.

v. Ettinghausen, Anfangsgründe der Physik. Wien 1844.

v. Ettinghausen, Beitrag zum Beweise vom Parallelogramm der Kräfte. (Sitzungsber. der K. Akad. z. Wien, math.-naturw. Kl. Bd. 2. 1849.)

Euclid, Elemente. (Stäckel u. Engel, Die Theorie der Parallellinien von Euclid bis auf Gauß.)

Foncenex, D. de, Sur les principes fondamentaux de la mécanique. (Miscellanea Taurinensia. t. II. 1760/61.)

Fourier, Oeuvres. t. II. Paris 1890.

Francesco, Alcuni problemi di meccanica in uno spazio a tre dimensioni di curvatura costante. (Rendiconti di Napoli (3) t. VI. 1900 und Atti d. Reale Acad. d. Napoli (2) X. 1901.)

Fresdorf, Über die Geometrie und die Potentialfunktion im Gaußischen und Riemannschen Raum. (Diss. Göttingen 1873.)

Gauß, Gasammelte Werke. V. u. VIII. Göttingen 1877 u. 1900.

Genocchi, A., Intorno ad una dimostrazione di Daviet de Foncenex. (Atti d. R. Acad. di Torino. t. IV. 1868/69.)

Genocchi, A., Dei primi principi della meccanica e della geometria in relazione al postulato d'Euclide. (Mem. d. Soc. ital. (3) t. II. 1869.)

Genocchi, A., Deux lettres de M. A. Genocchi à M. A. Quetelet sur diverses questions mathématiques. (Bull. d. l'Acad. de Belgique. (2) t. XXXVI. 1873.)

Genocchi, A., Sunta d'una memoria di A. Genocchi intorni ai Principii della geometria. (Atti della R. Acad. di Torino. t. XII. 1876/77.)

Genocchi, A., Sur un mémoire de Daviet de Foncenex. (Mem. d. Reale Acad. d. Torino. (2) XXIX. 1878.)

Goerges, E., Die Zusammensetzung der Kräfte. (Diss. Halle 1909.)

Helmholtz, H., Über den Ursprung und die Bedeutung der geometrischen Axiome. 1870. (Populärwissensch. Vorträge. Heft III.)

Helmholtz, H., Vorlesungen über die Dynamik diskreter Massenpunkte. (Herausgegeben von Otto Krigar-Menzel. 2. Aufl. Leipzig 1911.)

Hilbert, D., Grundlagen der Geometrie. Berlin u. Leipzig 1909.

Houël, Sur l'impossibilité de demontrer par une construction plane le principe de la théorie des parallèles. (Mém. d. la Soc. d. Sciences phys. et nat. de Bordeaux. VIII. 1870.)

Huygens, C., Demonstratio Aequilibria bilancis. (Opera varia. I. Lugduni Batavorum 1724.)

Kiepert, Grundriß der Differential- und Integralrechnung. II. 9. Aufl. Hannover 1908.

Killing, Über zwei Raumformen mit konstanter positiver Krümmung. (Journ. f. reine und angew. Math. 86. 1879.)

Killing, Die Rechnung in den nichteuklidischen Raumformen. (Journ. f. reine und angew. Math. 89. 1880.)

Killing, Über die nichteuklidischen Raumformen von n-Dimensionen. (Braunsberg 1883.)

Killing, Die Mechanik in den nichteuklidischen Raumformen. (Schulprogramm Brilon 1883 und Journ. f. reine und angew. Math. 98. 1885.)

Killing, Die nichteuklidischen Raumformen in analytischer Behandlung. Leipzig 1885.

Kirchhoff, O., Vorlesungen über mathematische Physik. Bd. 1. Leipzig 1897.

Lagrange, Mécanique analytique (3ième édition) t. I. Paris 1853.

Lagrange, Oeuvres Paris. t. I. 1867. t. XI. 1888.

Lamarle, Démonstration d'un postulatum d'Euclide. (Bull. de l'Acad. royale de Belgique. t. XXIII. 1856.)

Lambert, Theorie der Parallellinien. (Stäckel und Engel, Die Theorie der Parallellinien von Euklid bis auf Gauß.)

Laplace, Oeuvres complètes. t. VIII. Paris 1891.

Laplace, Recherches sur l'intégration des équations différentielles. (Mémoires de math. et de phys. t. VII. Paris 1776.)

Laplace, Exposition du système du monde (2ième édition) Paris An VII.

Laplace, Traité de Mécanique céleste. t. I. Paris An VII.

R. Lehmann-Filhès, Ableitung des Satzes vom Parallelogramm der Kräfte. (Arch. d. Math. u. Phys. (3) Bd. 2. 1902.)

Liebmann, Die Kegelschnitte und die Planetenbewegung im nichteuklidischen Raum. (Ber. d. Kgl. Sächs. Ges. d. Wiss. math.-phys. Klasse. 54. 1902.)

Liebmann, Nichteuklidische Geometrie. 1. Aufl. Leipzig 1905. 2. Aufl. Leipzig 1912.

Lindemann, Über unendlich kleine Bewegungen starrer Körper bei allgemeiner projektivischer Maßbestimmung. (Sitzungsber. d. phys.-med. Societät Erlangen. 1872/73.)

Lindemann, Über unendlich kleine Bewegungen und über Kraftsysteme bei allgemeiner projektivischer Maßbestimmung. (Math. Ann. VII. 1874.)

Lobatchewsky, Géométrie imaginaire. (Crelle Bd. XVII. 1837.)

Lobatchewsky, Collection complète des oeuvres géométriques. Kasan 1886.

Loria, Il passato ed il presente delle principali theorie geometriche. Torino 1887. (Dtsch. von F. Schütte, Leipzig 1888.)

Mach, Die Mechanik in ihrer Entwicklung. 7. Aufl. Leipzig 1912.

Most, Neue Darlegung der absoluten Geometrie und Mechanik mit Berücksichtigung der Frage nach den Grenzen des Weltenraumes. (Progr. Coblenz 1883.)

Neumann, Ausdehnung der Keplerschen Gesetze auf den Fall, daß die Bewegung auf einer Kugelfläche stattfindet. (Ber. d. Kgl. Sächs. Ges. d. Wiss. math.-phys. Klasse. 38. 1866.)

Opitz, Einige Sätze über die Anziehung in mehrfach ausgedehnten Gaußischen und Riemannschen Räumen. (Diss. Göttingen 1881.)

Planck, Acht Vorlesungen über theoretische Physik. Leipzig 1909.

Poisson, Traité de mécanique. 1ière édition. Paris 1811. Séconde édition. Paris 1833.

Rath, E., Das sogen. Paradoxon der nichteuklidischen Statik. (Arch. f. Math. u. Phys. (3) 14. 1909.)

Realis, Sur le parallélogramme des forces. (Nouv. ann. de math. t. II. 1843.)

Saccheri, G., Euclides ab omni naevo vindicatus. (Stäckel u. Engel, Die Theorie der Parallellinien von Euklid bis auf Gauß.)

Schering, E., Die Schwerkraft im Gaußischen Raum. (Nachr. d. Kgl. Ges. d. Wiss. zu Göttingen. 1870.)

Schering, E., Die Schwerkraft in mehrfach ausgedehnten Gaußischen und Riemannschen Räumen. (Nachr. d. Kgl. Ges. d. Wiss. zu Göttingen. 1873.)

Sommerville, Bibliography of non-euclidean Geometry. London 1911.

Sommervogel, Table méthodique des Mémoires de Trévoux. 1701—1715. Première Partie. Paris 1861. Bibliographie t. I u. II. 1865.

Stäckel, P., De ea mechanicae analyticae parte, quae ad varietates complurum dimensionem spectat. (Joannis Bolyai in Memoriam. Claudiopoli 1902.)

Stäckel, P., Bericht über die Mechanik mehrfacher Mannigfaltigkeiten. (Jahresber. d. dtsch. Math.-Ver. Bd. 12. 1903.)

Stäckel u. Engel, Die Theorie der Parallellinien von Euklid bis auf Gauß. Leipzig 1895.

Streintz, Die physikalischen Grundlagen der Mechanik. Leipzig 1883.

Study, Die Geometrie der Dynamen. (Deutsche Math.-Ver. Bd. 8. 1900.)

Study, Die Geometrie der Dynamen. Leipzig 1903.

Tilly, J. M. de, Études de mécanique abstraite. (Mémoires cour. et autres mém., publ. p. l'Académie royale de Belgique. t. 21. 1870.)

Tilly, J. M. de, Note sur les surfaces à courbure moyenne constante. (Bull. d. l'Acad. royale de Belgique. (2) t. XXX. 1870.)

Tilly, J. M. de, Essai sur les principes fondamentaux de la géometrie et de la mécanique. (Mém. d. la Soc. d. Sciences phys. et nat. de Bordeaux. (2) III. 1880.)

Einleitung.

Die Abhängigkeit der Mechanik von den Geometrien.

Bei der Ableitung der grundlegenden Gleichungen der Mechanik wird von ganz bestimmten mathematischen Voraussetzungen ausgegangen, die den Gleichungen ihr besonderes Aussehen verleihen. Dazu gehören zunächst die beim Aufbau benutzten Koordinatensysteme, denn die mathematisch-mechanische Gleichung ändert ihre Form, je nachdem, ob man rechtwinklige, Polar-, elliptische oder Zylinderkoordinaten wählt, ohne daß dadurch ihr Inhalt beeinflußt würde. Es werden oft derartige Transformationen benutzt, um eine mathematisch oder mechanisch schwer verständliche Gleichung auf eine faßliche Form zu bringen, oder um eine leichtere und elegantere Lösung zu ermöglichen. Verschiedene Formen für ein und denselben mechanischen Vorgang können außerdem auch auf der Wahl anderer Integrationskonstanten, also im allgemeinen auf veränderter Annahme der Anfangsbedingungen beruhen. Sehen wir von allen diesen Voraussetzungen ab, die nur die Gestalt, aber nicht den Inhalt unserer mechanischen Gleichungen beeinflussen, und wenden wir uns zu der Ableitung eines der Hauptsätze der Mechanik: der Zerlegung

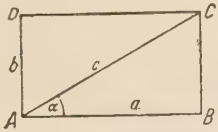

Abb. 1.

einer Kraft in zwei Komponenten mit Hilfe des Satzes vom Parallelogramm der Kräfte.

Es möge eine Kraft von bestimmter Größe c, aber be-

liebiger Richtung in zwei aufeinander senkrecht stehende Komponenten zerlegt werden (Abb. 1). Die Größe der Komponenten a und b wird dann durch die Beziehung

$$a = c \cos \alpha,$$
$$b = c \sin \alpha$$

gegeben.

War nun die Aufgabe so allgemein als möglich gestellt und lagen ihr irgendwelche Annahmen scheinbar nicht zugrunde, so wird sich doch zeigen, daß bei ihrer Lösung stillschweigend wichtige Voraussetzungen gemacht worden sind. Bezeichnet man mit A, B, C, D die Ecken des entstandenen Parallelogramms, so folgt aus der gegebenen Lösung der Aufgabe, daß auch bei B, C und D rechte Winkel entstanden sind. Folgende Überlegungen führten uns zu unserm Ergebnis: Zieht man durch den einen Endpunkt A der gegebenen Strecke c unter einem beliebigen Winkel die Gerade a und senkrecht dazu durch A die Gerade b, so erhält man die Größe von a, indem man durch C, den anderen Endpunkt der Strecke c, die Parallele zu b, und die Größe von b, indem man durch C die Parallele zu a zieht. Die Schnittpunkte B und D begrenzen dann die Strecken a bezw. b. Die geometrische Konstruktion zeigt nun deutlich die beiden bei der Lösung der Aufgabe gemachten Voraussetzungen:

1. Es ist stets möglich, durch einen Punkt zu einer Geraden eine Parallele zu ziehen, und
2. zu einer Geraden kann man durch einen Punkt immer nur eine Parallele legen.

Wir müssen uns nun die Frage vorlegen: Sind diese Annahmen unbedingt nötig, oder können wir auch andere Voraussetzungen machen, die diesen entgegengesetzt sind? Die Antwort darauf muß bejahend lauten, denn die gemachten Voraussetzungen gelten nur bei Annahme des fünften Euklidischen Axioms. Bauen wir dagegen unsere Mechanik auf Geometrien auf, in denen dieses Axiom nicht gilt, nämlich auf denen von Bolyai-Lobatchewsky oder Riemann, so haben wir zwei, bezw. keine Parallele zu einer Geraden,

und wir hätten durch andere Schlußfolgerungen die gestellte Aufgabe lösen müssen. Die beiden mathematisch-geometrischen Voraussetzungen lassen sich in eine zusammenfassen, sie sind abhängig von der zugrunde gelegten Geometrie. Wählen wir für die Ableitung der Grundlehren der Mechanik eine andere Geometrie, so erhalten wir — wie im folgenden zu zeigen sein wird — wesentlich andere Gleichungen und Gesetze. Es ergibt sich demnach: die Grundlehren und Gleichungen der Mechanik sind in hohem Maße abhängig von der zugrunde gelegten Geometrie, und es soll Zweck dieser Abhandlung sein, den Einfluß und die Bedeutung der nichteuklidischen Geometrien auf die Grundlehren der Mechanik nachzuweisen. Daß andere Geometrien als die euklidische die Grundlage eines mechanischen Systems bilden können und dieses nur eine Folge der körperlichen Organisation des empfindenden Subjekts ist, veranschaulicht Helmholtz[1]) an vernunftbegabten Wesen, die nur zwei Dimensionen kennen. Würden diese auf einer Ebene leben, so würden sie unsere Euklidische Geometrie aufstellen. Anders dagegen, wenn sie auf einer Kugel oder eiförmigen Fläche leben würden. Im ersten Falle würde ihre Geometrie z. B. die Sätze enthalten: Zu einer Geraden ist keine Parallele möglich, wenn man unter Geraden geodätische Linien auf der Fläche versteht, und die Winkelsumme eines Dreiecks ist stets größer als zwei Rechte und um so größer, je größer die Dreiecksfläche ist. Im zweiten Falle kann man zwischen je drei Punkten der Oberfläche kürzeste Linien ziehen, die Winkelsumme eines solchen Dreiecks würde sich mit seiner Lage auf der Fläche ändern.

Als Gegner derartiger Untersuchungen sei Dühring[2]) erwähnt, der diese in das Gebiet unfruchtbarer Spekulationen verweist.

---

[1]) H. Helmholtz, Über den Ursprung und die Bedeutung der geometrischen Axiome (Populäre wissenschaftliche Vorträge Heft 3 S. 21).

[2]) Dühring, Kritische Geschichte der allgemeinen Prinzipien der Mechanik S. 475.

I. Größen, die unabhängig von der zugrunde gelegten Geometrie sind.

Ehe wir den Einfluß der Geometrie auf die Grundlehren der Mechanik im einzelnen untersuchen, müssen wir uns zunächst mit der Frage beschäftigen, ob sich nicht mechanische Gesetze auffinden lassen, die in keinem Zusammenhang mit der Geometrie stehen und daher auch in jedem beliebig gestalteten Raum Anwendung finden können. In der Lehre der Bewegung werden drei Grundgesetze der Euklidischen Mechanik im allgemeinen vorangestellt:

1. Das Trägheitsgesetz[1]), d. h. jeder Körper verharrt im Zustande der Ruhe oder der gleichförmigen, geradlinigen Bewegung, solange keine Kraftwirkung ihn veranlaßt, seinen Zustand zu ändern.
2. Die Bewegungsänderung ist proportional der gegebenen Kraft und hat mit ihr gleiche Richtung[2]).
3. Wirkung und Gegenwirkung sind ihrer Größe nach gleich, und der Richtung nach entgegengesetzt[3]).

Denken wir uns diese Gesetze in eine der anderen Geometrien übertragen: Was soll z. B. ein auf einer Kugel lebendes zweidimensionales Wesen, das Riemannsche Geometrie, oder gar ein auf einer eiförmig gestalteten Welt existierendes denkendes Individuum, das eine sich von Ort zu Ort ändernde Geometrie treibt, unter einer Geraden verstehen? Definieren wir, wie wir es in der Euklidischen Geometrie zu tun pflegen, die Gerade als kürzeste Verbindung zwischen zwei Punkten, so müßte bei Anwendung des Träg-

---

[1]) Chwolson, Lehrbuch der Physik, Braunschweig 1902, S. 74.
[2]) Chwolson, Lehrbuch der Physik, Braunschweig 1902, S. 75.
[3]) Chwolson, Lehrbuch der Physik, Braunschweig 1902, S. 82.

heitsgesetzes der Kugelbewohner im Zweifel darüber sein, wie zwei Punkte A, B liegen müssen, damit der Körper sich geradlinig von A nach B bewegt. Entweder er bewegt sich geradlinig, dann muß er die Kugelfläche verlassen — und dieses ist unter den gemachten Voraussetzungen unmöglich —; soll er aber auf der Fläche bleiben, so läuft er auf einem größten Kugelkreise, also längs einer gebogenen Linie. Wir sehen demnach, daß geradlinig und kürzester Abstand keineswegs identisch sind, und müssen uns entscheiden, welche von beiden Bedeutungen der Geraden in nichteuklidischen Geometrien zukommen soll. Wir definieren: die Gerade ist stets die kürzeste Verbindung zwischen zwei Punkten, sie ist eine geodätische Linie. Ein Körper durchläuft also unter dem Einfluß der Kraft auf der Kugel den Bogen eines größten Kugelkreises.

Es erhebt sich nun die weitere Frage, ob bezw. wie sich der Kraftbegriff ändert. Unter der Bewegungsänderung, die nach dem zweiten Grundgesetz der Kraft proportional ist, ist seine Geschwindigkeitsänderung in einer gegebenen Zeit, z. B. in der Zeiteinheit zu verstehen. Dabei ist die Geschwindigkeit v bei einer gleichförmigen Bewegung der erforderlichen Zeit t umgekehrt und dem durchlaufenen Wege s direkt proportional. Zeit und Weg sind aber von der Geometrie unabhängige Größen, allerdings wiederum mit dem Zusatz, daß gerader Weg mit kürzestem Wege identisch ist. Die Geschwindigkeit v ist demnach in allen Geometrien dieselbe. Wählen wir die Zeiteinheit so klein, daß die Geschwindigkeit während ihrer Dauer als gleichförmig angesehen werden kann, oder nehmen wir für das Zeitintervall Δt eine mittlere Geschwindigkeit an, so wird, wenn wir die Bewegungsänderung mit Δv bezeichnen, der Ausdruck für die Kraft

$$f = c \frac{\Delta v}{\Delta t}$$

sein, eine Formel, die sich nach dem Vorhergehenden als unabhängig von den Geometrien erweist.

Das dritte Grundgesetz enthält keine geometrischen Voraussetzungen und gilt deswegen gleichmäßig für alle Geometrien.

Die drei Grundgesetze der Mechanik behalten demnach auch in andersgestalteten Welten unverminderte Gültigkeit. Außer diesen rein mechanischen Gesetzen müssen noch zwei andere Prinzipien untersucht werden, die nicht nur für die Mechanik, sondern für die gesamte Naturwissenschaft von fundamentaler Bedeutung sind: das Kausalgesetz und das Gesetz von der Erhaltung der Energie. Für die Naturwissenschaft, die von Erfahrungstatsachen ausgeht, bedeutet das Kausalgesetz die Existenz eines gesetzmäßigen Zusammenhanges zwischen zeitlich aufeinanderfolgenden Tatsachen, ist also unabhängig von der angewandten Geometrie und wird überall da uneingeschränkte Gültigkeit besitzen, wo Wesen wohnen, die den gleichen Denkgesetzen folgen wie wir. Auch das Gesetz der Erhaltung der Energie ist ein ebenso absolutes Prinzip. Denn die Umwandlungen der Energieformen ineinander verlaufen unabhängig von uns, ihre Summe muß stets unverändert bleiben, welche Geometrie auch der mathematischen Behandlung zugrunde gelegt werden mag. Denn gleichviel, ob die denkenden Wesen eine Kugel, eine eiförmige Fläche oder eine begrenzte Ebene bewohnen, so werden sie stets bemerken, daß der Donner dem Blitz folgt, daß bei einer chemischen Zersetzung ebensoviel Wärme frei wird, wie zum Aufbau aus ihren Komponenten erforderlich ist, daß also sowohl Kausalgesetz wie auch Energieprinzip absolut gültig sind. Auch der Einwurf, daß unter anderen geometrischen Voraussetzungen der Donner hörbar werden könnte, ehe man den Blitzstrahl aufzucken sähe, muß zurückgewiesen werden. Denn die gleichförmige Geschwindigkeit ist eine geometrisch nicht beeinflußte Größe, und daher wird die Lichtgeschwindigkeit auch für andere Geometrien treibende Wesen stets größer als die des Schalles sein.

II. Nichteuklidische Mechanik in historischer Entwicklung.

Es ist nunmehr auf die Frage einzugehen, welche Geometrien existieren, und welche von diesen sich zur Behandlung mechanischer Probleme als geeignet erweisen. Daher soll zunächst die historische Entwicklung der einzelnen Geometrien skizziert werden.

Euklid[1]) hatte seiner Geometrie eine Anzahl unbeweisbarer Forderungen vorangestellt. Unter diesen erweckte das fünfte Postulat über die Parallelität zweier Geraden frühzeitig das Interesse der Mathematiker, denn sie meinten, es sei nicht einfach genug, um es ohne Beweis hinzunehmen. Deshalb machten sie den Versuch, es aus den anderen Postulaten abzuleiten. Doch mißlang ihnen die Lösung, da sie an Stelle dieses Postulates ein ihm gleichwertiges einsetzten. Dem Jesuitenpater Girolamo Saccheri[2]) (1667—1733) kommt das unvergängliche Verdienst zu, das Problem der Parallellinien von einer ganz neuen Seite betrachtet zu haben. Die Untersuchungen seiner Vorgänger beruhten auf dem gemeinschaftlichen Grundgedanken, daß sich die fünfte Forderung aus den anderen Voraussetzungen ableiten lassen müsse. Saccheri aber sagt: Wäre die fünfte Forderung keine Folge der übrigen Voraussetzungen Euklids, so könnten in einem Viereck A B D C (Abb. 2), das in A und B rechte Winkel hat, und in dem

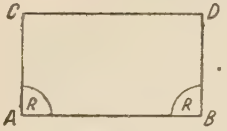

Abb. 2.

[1]) Euklid, Elemente, erschienen in P. Stäckel und Frd. Engel, Die Theorie der Parallellinien von Euklid bis auf Gauß S. 7/8.

[2]) Girolamo Saccheri, Euclides ab omni naevo vindicatus, erschienen in P. Stäckel und Frd. Engel, Die Theorie der Parallellinien von Euklid bis auf Gauß S. 41—136.

AC = BD ist, die Winkel bei C und D spitz oder stumpf sein. Demgemäß stellt er zwei neue Geometrien auf, die er als Hypothese des spitzen bezw. stumpfen Winkels bezeichnet, und zieht aus diesen Annahmen geometrische Folgerungen. An der Wahrheit der fünften Forderung hat Saccheri nicht gezweifelt, denn seine Schrift soll — wie er im Vorwort an die Leser mitteilt — einen Versuch darstellen, Euklid von jedem Makel zu reinigen, den man ihm auf Grund seines Parallelenaxioms angetan hat. Man muß also bei der Beweisführung des Saccheri es sich stets vor Augen halten, daß er die Geometrien aufbaut, in der festen Gewißheit, darin auf Widersprüche zu stoßen, die die Unmöglichkeit dieser Geometrien, also eine Rechtfertigung der Euklidischen darstellen. Auf einen solchen stößt er bald bei der Hypothese des stumpfen Winkels, bei der des spitzen aber, wie er selbst sagt, erst nach langem Kampfe. Auf demselben Wege versucht Lambert[1]) 1728—1777 die unbedingte Gültigkeit des fünften Postulates nachzuweisen, doch scheint ihn seine Beweisführung nicht befriedigt zu haben, da er von einer Veröffentlichung seines Werkes Abstand nahm. Er baut wie Saccheri eine Geometrie des stumpfen und eine des spitzen Winkels auf und kommt zu dem bemerkenswerten Ergebnis, daß die Geometrie des stumpfen Winkels auf einer Kugel gilt. Bei der Aufstellung der Geometrie des spitzen Winkels spricht er die für die damalige Zeit außerordentlich kühne Vermutung aus, daß sie auf einer imaginären Kugelfläche dargestellt werden könne.

Am Ausgange des 18. Jahrhunderts wird das Interesse für die Theorie der Parallellinien in Deutschland und Frankreich bereits sehr lebhaft, und die Zahl der Veröffentlichungen, die sich mit diesem Gegenstand beschäftigen, ist in stetem Wachsen begriffen, trotzdem die Göttinger Schule 1763[2])

---

[1]) Lambert, Theorie der Parallellinien, erschienen in Stäckel und Engel, Theorie der Parallellinien von Euklid bis auf Gauß S. 139—208.

[2]) Bonola, Die nichteuklidische Geometrie S. 66.

amtlich die Notwendigkeit erklärt, sich der Euklidischen Forderung fügen zu müssen. Alle bedeutenden Mathematiker, wie d'Alembert, Fourier, Lagrange, Legendre, Schweikart und Gauß, beschäftigen sich mit dieser Frage. Das Verdienst aber, die Wissenschaft von der zweitausendjährigen Autorität Euklids befreit und eine vom Parallelenpostulat unabhängige Geometrie aufgebaut zu haben, kommt Gauß[1]) zu, der als Erster das klare Bild einer nichteuklidischen Geometrie hat. Doch erst nach den Veröffentlichungen von Lobatchewsky (1729/30) und Bolyai (1832) erfuhr man durch gelegentliche Äußerungen, daß Gauß zu den gleichen Resultaten wie die beiden ebengenannten Mathematiker gelangt war, er hat aber seine ausgedehnten Untersuchungen nie veröffentlicht. Gauß hat damit auch gleichzeitig die Unbeweisbarkeit des Euklidischen Axioms gezeigt, da der Aufbau von Geometrien möglich ist, die seiner nicht bedürfen. Für unsere Untersuchung erhebt sich nun die weitere Frage nach der Anzahl und Art der möglichen Geometrien. Sind mit der Geometrie des spitzen oder des stumpfen Winkels oder der des Euklid alle Arten der Geometrien erschöpft, oder können auf anderen Grundlagen noch andere Geometrien aufgestellt werden? Will man einen Überblick über alle möglichen Geometrien gewinnen, so muß man die zum Aufbau einer Geometrie nötigen Axiome aufstellen, wie dies zuerst von Hilbert[2]) unternommen worden ist. Aus dem Beweis der Unabhängigkeit des Parallelenaxioms folgt die Möglichkeit der nichteuklidischen Geometrie, aus der des Stetigkeitsaxioms eine — wie Hilbert sie genannt hat — nichtarchimedische Geometrie. Auf dieser aber eine Mechanik aufbauen zu wollen, ist unmöglich, da wir die Bewegungsgesetze nur unter der Annahme der Stetigkeit und Kontinuität der Wege ableiten können. Aus ähnlich ein-

[1]) Brief von Gauß an Schumacher (12. Juli 1831), Gauß' Werke Bd. 8 S. 215 f.

[2]) D. Hilbert, Grundlagen der Geometrie, Leipzig und Berlin 1909.

leuchtenden Gründen erweisen sich auch die übrigen aufgestellten Geometrien als Grundlage zum Aufbau einer Mechanik als ungeeignet. Wir sind also zu dem Ergebnis gekommen, daß drei Geometrien zur Grundlage einer Mechanik dienen können. Sie entbehren alle nicht einer gewissen Anschaulichkeit, da die Euklidische Geometrie auf einer Ebene, die Geometrie des stumpfen Winkels auf einer Kugel und die des spitzen Winkels auf einer Pseudosphäre gilt. Gauß[1]) hat durch seine mathematischen Untersuchungen bewiesen, daß die auf einer Fläche herrschende Geometrie von ihrem Krümmungsmaß K abhängt. Wird dieses als konstant angesehen, so gilt auf der ganzen Fläche dieselbe Geometrie.

Ist

$K > 0$, so gilt die Theorie des stumpfen Winkels oder die Riemannsche Geometrie, ist

$K = 0$, so gilt die Euklidische Geometrie, ist

$K < 0$, so gilt die Theorie des spitzen Winkels oder die Geometrie von Bolyai-Lobatchewsky.

Eine Mechanik für Flächen mit variablem Krümmungsmaß aufzustellen, wäre zwecklos, denn an jedem Punkte der Fläche würde sich mit dem Krümmungsmaß auch die Mechanik ändern. Es hat auch nicht — worauf im folgenden mehrfach hingewiesen werden wird — an Untersuchungen gefehlt, einzelne Sätze der Mechanik auf mehrdimensionale Räume auszudehnen.

Einen geschichtlichen Überblick über die Schriften, in denen die Mechanik in nichteuklidischen und mehrdimensionalen Räumen behandelt wird, gibt Stäckel[2]) zugleich mit einer kurzen Charakteristik dieser Werke. Zwischen beiden besteht historisch gesprochen ein enger Zusammenhang. Legt man nämlich als Quadrat des Linienelementes eine quadratische

---

[1]) Gauß' Werke Bd. 8 S. 385.

[2]) Paul Stäckel, Bericht über die Mechanik mehrfacher Mannigfaltigkeiten, Dtsch. Math.-Ver. Bd. 12 1903 S. 469; Paul Stäckel, De ea mechanicae analyticae parte quae ad varietates complurum spectat (aus Joannis Bolyai in memoriam, Claudiopoli 1902).

Form der Differentiale der Veränderlichen zugrunde, so sind, wie Beltrami 1869 nachwies, die Differentialgleichungen der geodätischen Linien der Mannigfaltigkeit identisch mit den Differentialgleichungen der kräftefreien Bewegung, die die Lagrangeschen Gleichungen liefern. Von diesen Gleichungen aus, die auf die allgemeinen Koordinaten Lagranges in seiner „Mécanique Analytique“ zurückgehen, hätte sich die Mechanik weiter entwickeln können, aber das Interesse für eine nichteuklidische Mechanik erwachte erst nach den Arbeiten von Riemann und Helmholtz über die Grundlagen der Geometrie. Diese Untersuchungen stehen wiederum in einem engen Zusammenhang mit der Mechanik, denn bei den Fragen nach den charakteristischen Eigenschaften des Raumes kommt man zu der Frage nach den Mannigfaltigkeiten, in denen starre Systeme frei beweglich sind. Dies ist aber der Fall bei allen Räumen, für die das Quadrat des Linienelements eine quadratische Differentialform konstanten Krümmungsmaßes ist. Dies gilt ebenso wie für die Euklidische Geometrie für die Bolyai-Lobatchewskysche und für die Riemannsche, und deshalb kann man sie zum Aufbau einer Mechanik benutzen.

Es mögen nunmehr in historischer Folge die Gesetze der nichteuklidischen Mechanik entwickelt und dargelegt werden. Die Zerlegung und die Zusammensetzung von Kräften und das Gesetz des Hebels, für das Archimedes schon ca. 250 v. Chr. den mathematischen Ausdruck fand[1]), sind auch diejenigen Aufgaben, die im Mittelalter auf immer neue Weise abgeleitet worden sind.

Die erste Arbeit, die die Größe der resultierenden Kraft berechnet, ohne dabei das Parallelenpostulat zu benutzen, rührt von Daviet de Foncenex[2]) her. Er findet die Größe und Richtung der Resultante und den Ausdruck für

---

[1]) E. Goerges, Die Zusammensetzung der Kräfte (Diss. Halle 1909).

[2]) Daviet de Foncenex, Sur les principes fondamentaux de la mécanique. Miscellanea Taurinensia t. II 1759 p. 229 f.

das Gleichgewicht am Hebel auf rein analytischem Wege ohne geometrische Voraussetzungen. Als geistiger Urheber dieser Abhandlung muß wohl Lagrange[1]) angesehen werden, der sich besonders zu Ende seines Lebens mit der Theorie der Parallelen beschäftigte und bereits erkannt haben soll[2]), daß die sphärische Geometrie vom Parallelenpostulat unabhängig ist, weshalb er, um Widersprüche zu vermeiden, die ebene Geometrie als Geometrie auf einer Kugel mit unendlich großem Radius betrachtete. Er verfaßte sogar am Ende seines Lebens eine Abhandlung[3]) über die Parallelen. Als er sie in der Akademie vorlas, unterbrach er sich mit den Worten: „il faut que j'y songe encore" und steckte das Manuskript wieder ein.

Seine Untersuchung führt Foncenex[4]) zu einer funktionalen Beziehung, deren Lösung eindeutig durch die Gleichung

$$P : Q : R = \sin \alpha_2 : \sin \alpha_1 : \sin \alpha$$

gegeben wird, wenn R die Resultante, P und Q die Komponenten und

$$\begin{aligned} &\sphericalangle \alpha_1 = \sphericalangle PR, \\ &\sphericalangle \alpha_2 = \sphericalangle QR \text{ und} \\ &\sphericalangle \alpha_1 + \sphericalangle \alpha_2 = \sphericalangle \alpha \text{ ist.} \end{aligned}$$

Auch die Ableitung[5]) des Hebelgesetzes, wie Foncenex es bringt, ist seinen Nachfolgern Vorbild gewesen. Er vermeidet hier gleichfalls geometrische Voraussetzungen und kommt durch seine analytische Ableitung zu dem Ergebnis, daß die Produkte aus Kraft und Kraftarm und Last und Lastarm einander gleich sind.

---

[1]) Delambre, Notice sur la vie et les ouvrages de M. Le Comte I.-L. Lagrange (Lagrange oeuvres t. I p. 1).

[2]) Loria, Die hauptsächlichsten Theorien der Geometrie S. 108.

[3]) Stäckel und Engel, Die Theorie der Parallellinien von Euklid bis auf Gauß S. 212.

[4]) Für den genauen Gang der Untersuchung vgl. Goerges S. 29/30.

[5]) Ebenda S. 49.

Schon einige Jahre später veröffentlicht d'Alembert[1]) neue Ableitungen für diese Probleme[2]).

Die Untersuchung des Gleichgewichts am Hebel führt ihn zu der Gleichung[3])

$$\varphi(x)\,\varphi(y) = \varphi(x+y) + \varphi(x-y)\,^{4}),$$

zu derselben, die er bei Ableitung des Kräfteparallelogramms erhalten hat. Daher sind auch ihre Lösungen identisch.

d'Alembert hat demnach gezeigt, daß die Probleme über die Zusammensetzung von Kräften und das Gleichgewicht am Hebel auf dieselbe Funktionalgleichung führen, für deren Lösung er neue Wege zeigt.

Mit der Lösung der Funktionalgleichung

$$\varphi(x)^2 = \varphi(2x) + 2,$$

die aus der obenstehenden unter Berücksichtigung des Wertes $\varphi(0) = 2$ für $x = y$ hervorgeht, hat sich auch Laplace[5]) beschäftigt, und zwar schlägt er folgenden von seinen Vorgängern abweichenden Weg ein.

Setzt man

$$\mu_z = x, \quad \mu_{z+1} = 2x,$$

dann wird

$$\mu_{z+1} = 2\mu_z.$$

---

[1]) d'Alembert, Mémoires sur les principes de la mécanique (Mém. d. l'Acad. R. des Sciences 1772 p. 278—280); d'Alembert, Addition au mémoire sur la courbe qui forme une corde tendue, mise en vibration (Hist. d. l'Acad. R. des Sciences de Berlin 1750 p. 355/56); d'Alembert, Opuscules mathématiques t. VI p. 360—364.

[2]) Für die Ableitung vgl. Goerges S. 30 u. 34.

[3]) d'Alembert, Mémoires sur les principes de la mécanique p. 283/84.

[4]) Eine ähnliche Gleichung erhielt Foncenex. Ihre allgemeine Lösung gibt d'Alembert in der Form:

$$\varphi(x) = e^{x\sqrt{A}} + e^{-x\sqrt{A}}.$$

[5]) Laplace, Oeuvres complètes, Paris 1891, t. VIII p. 106/07; Laplace, Recherches sur l'intégration des équations différentielles etc. (Mémoires de math. et de phys. t. VII, Paris 1776, p. 74/75).

Man führe noch ein:

$$\mu_z = A\,2^z = x.$$

Überdies hat man

$$\varphi(2x) = \varphi(\mu_{z+1})$$

und

$$\varphi(x) = \varphi(\mu_z).$$

Führt man für $\varphi(\mu_z)$ den Wert t_z und entsprechend für $\varphi(\mu_{z+1})$ t_{z+1} ein, so geht durch Einsetzen die Funktionalgleichung über in

$$t_{z+1} = t_z^2 - 2.$$

Um diese Gleichung lösen zu können, setze man

$$t_1 = a + \frac{1}{a},$$

dann folgt aus der Funktionalgleichung:

$$t_2 = a^2 + \frac{1}{a^2}$$

$$t_3 = a^4 + \frac{1}{a^4},$$

allgemein

$$t_z = a^{2^{z-1}} + \frac{1}{a^{2^{z-1}}}.$$

Da aber a eine willkürliche Konstante und nach den vorangegangenen Festsetzungen

$$2^{z-1} = \frac{x}{2A}$$

ist, so folgt

$$t_z = a^{\frac{x}{2A}} + a^{-\frac{x}{2A}} = b^x + b^{-x}.$$

Aus

$$2^{z-1} = \frac{x}{2A}$$

folgt aber auch

$$(z-1)\ln 2 = \ln \frac{x}{2A},$$

$$z = \frac{\ln x - \ln 2'A}{\ln 2} + 1,$$

oder

$$z = \frac{\ln x}{\ln 2} + H,$$

wobei H wie auch b im vorhergehenden Gleichungssystem willkürliche Konstante sind. b kann daher als Funktion von $\sin 2\pi \frac{\ln x}{\ln 2}$ und $\cos 2\pi \frac{\ln x}{\ln 2}$ angesehen werden, und die Funktionalgleichung hat die allgemeine Lösung:

$$\varphi(x) = \varphi\left(\sin 2\pi \frac{\ln x}{\ln 2},\ \cos 2\pi \frac{\ln x}{\ln 2}\right)^{x} + \varphi\left(\sin 2\pi \frac{\ln x}{\ln 2},\ \cos 2\pi \frac{\ln x}{\ln 2}\right)^{-x},$$

über deren Beziehung oder Anwendbarkeit in der Mechanik sich bei Laplace nichts findet. Bei der Besprechung[1]) der Zusammensetzung von Kräften gibt er ohne Beweis an, daß die resultierende Kraft die Diagonale des Parallelogramms ist, dessen Seiten von den Komponenten gebildet werden. Eine Ableitung dieses Problems findet sich an anderer Stelle[2]). Auch Poisson[3]) verdanken wir die Aufstellung und Lösung[4]) einer Funktionalgleichung für das Kräfteparallelogramm. Obwohl Poisson nur eine Gleichung für das Kräfteparallelogramm abgeleitet hat, wird im allgemeinen die Hebelgleichung,

---

[1]) Laplace, Exposition du systême du monde Paris An VII p. 136—138.

[2]) Laplace, Traité de mécanique céleste I p. 4—6, für den Gang des Beweises vgl. Goerges S. 36/37.

[3]) Poisson, Traité de mécanique 1ière édition I 1811 p. 13—17, Seconde édition I 1833 p. 45—50.

[4]) Für den Gang der Lösung vgl. Goerges S. 31.

die dieser formell gleichgebaut ist, als Poissonsche Gleichung bezeichnet.

Schon 1843 gibt Dippe[1]) eine andere Lösung der Funktionalgleichung

$$f(\alpha) \cdot f(\beta) = f(\alpha + \beta) + f(\alpha - \beta),$$

zu der er auf demselben Wege wie Foncenex kommt[2]).

Im folgenden Jahre erscheint eine Abhandlung von Barfuß[3]), die sich mit dem gleichen Problem befaßt, aber nur den Beweis von Poisson wiederholt, den er gegen ungerechtfertigte Angriffe in Schutz nehmen will. Gleichzeitig beschäftigt sich auch eine französische Arbeit von Realis[4]) mit einer neuen Modifikation der Poissonschen Untersuchung. Seine Betrachtung, die er auf zwei gleichgroße Kräfte beschränkt, führt ihn zu der Poissonschen Gleichung

$$f(\alpha) \cdot f(\beta) = f(\alpha + \beta) + f(\alpha - \beta),$$

zu der noch die beiden Grenzbedingungen

$$f(0) = 2 \text{ und } f\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0$$

kommen. Setzt man $\alpha = \beta = \frac{\pi}{4}$, so geht die Bestimmungsgleichung über in:

$$f\left(\frac{\pi}{4}\right)^2 = f\left(\frac{\pi}{2}\right) + f(0),$$

also

$$f\left(\frac{\pi}{4}\right) = \sqrt{2}.$$

Setzt man nacheinander $\alpha = \beta$, $\alpha = 2\beta$, $\alpha = 3\beta \cdots$, so erhält man $f(\beta)^2 = f(2\beta) + f(0)$

---

[1]) Dippe, Über den Satz vom Parallelogramm der Kräfte (Arch. f. Math. u. Phys. Bd. 3 1843 S. 399).

[2]) Für den Gang der Lösung vgl. Goerges S. 31/32.

[3]) Barfuß, Über die naturphilosophischen Prinzipien der Bewegungslehre (Arch. f. Math. u. Phys. Bd. 5 1844 S. 306).

[4]) Realis, Sur le parallélogramme des forces (Nouv. annal. de mathém. II 1843 p. 529—532).

oder

$$f(2\beta) = f(\beta)^2 - 2$$

und entsprechend

$$f(3\beta) = f(\beta)^3 - 3f(\beta),$$
$$f(4\beta) = f(\beta)^4 - 4f(\beta) \cdots$$

allgemein

$$f(n\beta) = f(\beta)^n - n f(\beta)^{n-2} + \frac{n(n-3)}{2} f(\beta)^{n-4}$$
$$- \frac{n(n-4)(n-5)}{2 \cdot 3} f(\beta)^{n-6} + - \cdots$$

Diese Beziehungen sind aber identisch mit denjenigen, die zwischen den Kosinusfunktionen existieren, daher muß die Poissonsche Gleichung durch

$$f(\alpha) = 2 \cos \alpha$$

und entsprechend durch

$$f(\beta) = 2 \cos \beta,$$
$$f(\alpha + \beta) = 2 \cos (\alpha + \beta),$$
$$f(\alpha - \beta) = 2 \cos (\alpha - \beta)$$

befriedigt werden. Dann kann man aber mit Recht auch

$$f(n\alpha) = 2 \cos n\alpha$$

und gleichfalls

$$f\left(\frac{\alpha}{n}\right) = 2 \cos \frac{\alpha}{n}$$

schließen, da dafür eine entsprechende Gleichung gilt. Diese Gleichung für $f\left(\frac{\alpha}{n}\right)$ hat n-Wurzeln von der Form

$$f\left(\frac{\alpha}{n}\right) = 2 \cos \frac{2k\pi + \alpha}{n},$$

wobei k die Werte 0, 1, $2 \cdots (n-1)$ annehmen kann. Setzt man $n = 2$, so kann von den beiden gleichgroßen, aber entgegengesetzten Wurzeln nur der positive Wert gelten, und es wird allgemein

$$f\left(\frac{\alpha}{2^n}\right) = 2\cos\frac{\alpha}{2^n}.$$

Die Gleichung gilt demnach sicher für $k = 0$. Ist $k \neq 0$ und $n = \mu$, so wird

$$f\left(\frac{\alpha}{2^\mu}\right) = 2\cos\left(\frac{k\pi}{2^{\mu-1}} + \frac{\alpha}{2^\mu}\right).$$

Nimmt man an, daß $\mu - 1$ gleich der höchsten in k enthaltenen Potenz von 2 wird, so wird $\frac{k\pi}{2^{\mu-1}}$ ungerade, und

$$f\left(\frac{\alpha}{2^\mu}\right) = -2\cos\frac{\alpha}{2^\mu}$$

und Werte von $\mu - 1$ größer als dieser Exponent führen zum gleichen Resultat. Daher muß

$$f\left(\frac{\alpha}{n}\right) = 2\cos\frac{\alpha}{n}$$

und ebenso

$$f\left(\frac{m\alpha}{n}\right) = 2\cos\frac{m\alpha}{n}$$

für jeden Wert von α gelten.

Eine von den vorhergehenden etwas abweichende Methode benutzt Ettinghausen[1]), allerdings nur für den Spezialfall zweier rechtwinklig zueinander stehenden Kräfte P und Q, von denen P den Winkel α mit der Resultierenden bildet (Abb. 3). Es ist $\alpha = f\left(\frac{Q}{P}\right)$. Es werde jetzt im Angriffspunkt 0 senkrecht zu R nach der Seite Q eine Kraft S angebracht, die mit R zu der Resultierenden U zusammengesetzt werden kann. Ist β der Winkel, den U und R miteinander bilden, so ist

---

[1]) Ettinghausen, Beitrag zum Beweise vom Parallelogramm der Kräfte (Sitzungsber. d. k. Akad. z. Wien, mathem.-naturw. Klasse 2 1849 S. 155—159).

$$\beta = f\left(\frac{S}{R}\right).$$

S kann als Resultierende zweier Kräfte Q′ in Richtung Q und P′ entgegengesetzt P gedacht werden. U ist demnach

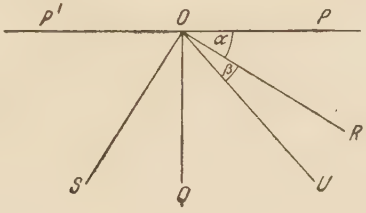

Abb. 3.

die Resultante von P, Q, S, und ersetzt man S durch seine Komponenten, so ist U ersetzbar durch $P - P'$ und $Q + Q'$. Daher wird

$$\alpha + \beta = f\left(\frac{Q + Q'}{P - P'}\right).$$

S, Q′, P′ bilden aber miteinander die gleichen Winkel wie R, P, Q, und daher ist:

$$P' : Q = Q' : P = S : R,$$

folglich

$$\frac{Q + Q'}{P - P'} = \frac{Q + \frac{PS}{R}}{P - \frac{QS}{R}} = \frac{\frac{Q}{P} + \frac{S}{R}}{1 - \frac{Q}{P} \cdot \frac{S}{R}}.$$

Setzt man jetzt

$$\alpha = f(x), \quad \beta = f(y), \quad (\alpha + \beta) = f\left(\frac{x + y}{x - y}\right)$$

und differentiert die Gleichung

$$f(x) + f(y) = f\left(\frac{x + y}{1 - xy}\right)$$

einmal nach x und dann nach y, so wird

$$f'(x) = f'\left(\frac{x+y}{1-xy}\right) \cdot \frac{(1-xy)+y(x+y)}{(1-xy)^2}$$

$$= f'\left(\frac{x+y}{1-xy}\right) \cdot \frac{1+y^2}{(1-xy)^2}$$

und entsprechend

$$f'(y) = f'\left(\frac{x+y}{1-xy}\right) \cdot \frac{1+x^2}{(1-xy)^2}.$$

Aus diesen beiden Gleichungen folgt die Beziehung

$$f'(x)(1+x^2) = f'(y) \cdot (1+y^2).$$

Da zwischen x und y kein Zusammenhang besteht, muß jede Seite derselben Konstanten gleich sein, also

$$f'(x) = \frac{A}{1+x^2}.$$

Durch Integration folgt

$$f(x) = A \operatorname{arc\,tg} x + B.$$

Wird $Q = 0$, so fällt R mit P zusammen, und es wird für $x = 0$:

$$f(x) = A \operatorname{arc\,tg} x.$$

Wird aber $P = 0$, so wird $\alpha = \frac{\pi}{2}$ und

$$\frac{\pi}{2} = A \operatorname{arc\,tg} \infty = A\frac{\pi}{2},$$

d. h. $f(x) = \operatorname{arc\,tg} x$, und nach Wiedereinführung der ursprünglichen Bezeichnungen

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{P}{Q}$$ [1].

---

[1]) In seinem Werke „Anfangsgründe der Physik“ S. 70—75 gibt Ettinghausen noch einen anderen Weg an, um die Resultante zweier rechtwinklig aufeinander stehender Kräfte P und Q zu finden. Es gelingt ihm auf ähnliche Art wie Lehmann-Filhes (vgl. S. 21 f.), die Größe der Resultante zu berechnen. Um ihre Richtung festzustellen und ihren Wert bei beliebig gerichteten Komponenten zu finden, muß er das Parallelenpostulat voraussetzen.

Wiederum eine andere Ableitung gibt Lehmann-Filhès[1]) für zwei senkrecht aufeinander stehende Kräfte P und Q, deren Resultante R mit P den Winkel x bildet (Abb. 4).

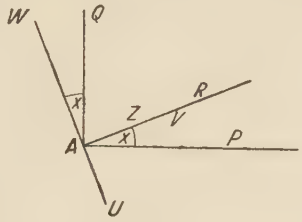

Abb. 4.

Es sei

$$1.\quad \frac{P}{R} = f(x) \text{ und } \frac{Q}{R} = f\left(\frac{\pi}{2} - x\right).$$

Es werden P und Q in je zwei Kräfte U und V bezw. W und Z so zerlegt, daß U und W senkrecht auf R und V und Z in ihre Richtung fallen. Dann muß sein

$$2.\quad \frac{Z}{Q} = \frac{U}{P} = f\left(\frac{\pi}{2} - x\right);\quad \frac{V}{P} - \frac{W}{Q} = f(x).$$

Eliminiert man P und Q, so wird mit Hilfe von 1.

$$\frac{U}{R} = f(x) \cdot f\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \frac{W}{R},\quad \text{d. h. } W = U.$$

Da diese Kräfte, weil entgegengesetzt, sich aufheben, so müssen

$$3.\quad Z + V = R$$

sein. Ferner ist nach 1. und 2.

$$\frac{V}{P} = \frac{P}{R} \text{ und } \frac{Z}{Q} = \frac{Q}{R}.$$

Dann wird

$$4.\quad R^2 = P^2 + Q^2.$$

Um den Winkel zu finden, lasse man auf A noch die Kraft k Q

[1]) R. Lehmann-Filhes, Analytische Ableitung des Satzes vom Parallelogramm der Kräfte (Arch. f. Math. u. Phys. (3) 2 1902 p. 124/25).

entgegengesetzt P (Abb. 5) und kP in Richtung Q einwirken. Ihre Resultante ist dann kR, die sich mit R zu der Resultante S vereinigen läßt. S und R mögen sich unter dem Winkel y schneiden. x und y sind Funktionen der Komponenten, daher

$$x = \psi\left(\frac{Q}{P}\right), \quad y = \psi\left(\frac{kR}{R}\right) = \psi(k).$$

Ebenso wie bei Ettinghausen (vgl. S. 20) läßt sich S als

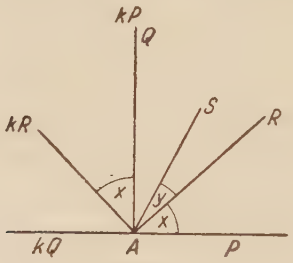

Abb. 5.

Resultante der Kräfte $P - kQ$ und $Q + kP$ auffassen, und daher ist:

$$5. \quad x + y = \psi\left(\frac{Q + kP}{P - kQ}\right) = \psi\left(\frac{\frac{Q}{P} + k}{1 - k\frac{Q}{P}}\right).$$

Der Autor folgert aus Gleichung 4, daß die Komponenten Seiten eines Rechtecks mit der Diagonale R sind, und bestimmt

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{Q}{P}.$$

Er verifiziert die Richtigkeit dieser Behauptung durch Gleichung 5. Während bis zur Aufstellung der Funktionalgleichung das Parallelenaxiom nicht verwendet wird, so wird dieses jedoch bei Bestimmung[1]) der Winkelfunktion stillschweigend vorausgesetzt.

[1]) Weitere Beweise für die Zusammensetzung von Kräften finden sich bei Goerges.

Die bisher besprochenen Arbeiten stellen noch keine nichteuklidische Mechanik dar und sind auch nicht in dieser Absicht verfaßt worden. Aber sie haben ihr unbewußt einen großen Dienst geleistet, denn sie wiesen nach, daß sich sowohl die Zusammensetzung von Kräften unter einem beliebigen Winkel als auch von parallelen Kräften, die senkrecht zu derselben Geraden angreifen, auf analytischem Wege ohne Zuhilfenahme geometrischer Voraussetzungen berechnen läßt. Beide führen zu Funktionalgleichungen, bei Laplace (S. 13 f.) sogar zu der gleichen, deren Lösung auf ganz verschiedenartigen Wegen aufgesucht wird. Die Eindeutigkeit der Lösung im Falle des Kräfteparallelogramms zeigt späteren Forschern, daß sich unabhängig vom Parallelenpostulat die Kräfte stets in gleicher Weise zu einer Resultante zusammensetzen. Die Mehrdeutigkeit der Lösung, die die Funktionalgleichung am Hebel liefert, und die das 18. Jahrhundert noch nicht zu deuten vermochte, spielt in den Untersuchungen der folgenden Zeit eine bedeutende Rolle, da bei diesem Gesetz am deutlichsten der Zusammenhang zwischen Mechanik und Geometrie zutage tritt.

Im ersten Drittel des 19. Jahrhunderts waren die grundlegenden Arbeiten von Bolyai und Lobatchewsky über nichteuklidische Geometrie erschienen, doch erst ungefähr vierzig Jahre später erscheinen die ersten Arbeiten, die eine Mechanik auf Grund nichteuklidischer Geometrie aufbauen.

Im Jahre 1868 legt J.-M. de Tilly[1]) der Belgischen Akademie der Wissenschaften seine Arbeit: Études de Mécanique abstraite“ vor, die die erste nichteuklidische Mechanik überhaupt darstellt.

In dem ersten Teil seiner Arbeit leitet er die für den Aufbau der Mechanik nötigen geometrischen Gleichungen ab. Sie beziehen sich nur auf rechtwinklige Dreiecke und werden

[1]) J.-M. de Tilly, Études de mécanique abstraite (Mémoires couronnés et autres mémoires, publiés par l'académie royale des sciences, des lettres et des beaux-arts de Belgique 1870).

mittels kinematischer Betrachtung gewonnen, die nur solche Eigenschaften eines begrenzten Gebietes der Ebene benutzt, die unabhängig von der Winkelsumme des Dreiecks, also vom Parallelenpostulat ist. Es werde eine Probe seiner Methode gegeben. Sind v und v′ (Abb. 6) die rechtwinklig zueinander

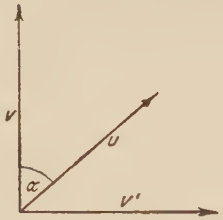

Abb. 6.

stehenden Komponenten einer Geschwindigkeit u, so ändert sich diese proportional den Komponenten. Er bezeichnet dann als „cosinus cynématique“ des Winkels α die konstante Größe $\frac{v}{u}$, mit der man eine beliebige Geschwindigkeit k u längs eines der Schenkel dieses Winkels multiplizieren muß, um seine Komponente k v längs des anderen Schenkels zu erhalten, wenn die zweite Komponente k v′ senkrecht zu k v im Scheitel dieses Winkels steht. Der „sinus cynématique“ wird dann als cosinus des Komplementwinkels definiert. Nach diesen Definitionen lassen sich die trigonometrischen Formeln ableiten. Aus dem Vorhergesagten folgt, daß sich jede Ge-

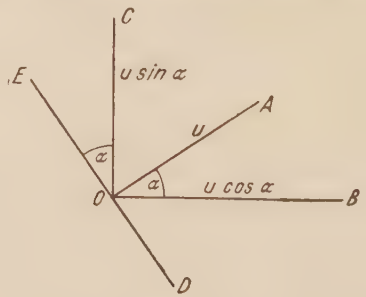

Abb. 7.

schwindigkeit in zwei zueinander senkrechte Komponenten u cos α und u sin α zerlegen läßt (Abb. 7).

$u \cos \alpha$ läßt sich wiederum zerlegen in $u \cos^2 \alpha$ längs OA und in $u \cos \alpha \sin \alpha$ längs OD, senkrecht zu OA. Entsprechend ergibt $u \sin \alpha$ die Komponenten $u \sin \alpha \cos \alpha$ längs OE, der geradlinigen Verlängerung von OD und $u \sin^2 \alpha$ längs OA. Die längs OE und OD wirkenden Kräfte heben sich, weil gleichgroß und entgegengesetzt, auf, die anderen Komponenten müssen daher zusammen die ursprüngliche Geschwindigkeit u ergeben.

Folglich ist:

$$u \sin^2 \alpha + u \cos^2 \alpha = u,$$
$$\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1.$$

Auf entsprechende Weise leitet er die Additionstheoreme ab. Im Anschluß an Lamarle[1]) führt er an Stelle der Parallelen den Begriff der äquidistanten Geraden ein und definiert: Die Äquidistante ist der geometrische Ort aller Punkte, die in gleicher Entfernung einer Geraden nach derselben Seite hin und in einer Ebene mit ihr liegen. Läßt man das Euklidische Postulat fallen, so muß man zugeben, daß die Äquidistante eine gebogene Linie sein kann, und de Tilly will die Frage hierüber offen lassen. Bezeichnet man den Abstand zwischen der Äquidistanten und der Geraden als Höhe und die Gerade als Basis, dann ist das Verhältnis eq a der Äquidistanten zur Basis bei gegebener Höhe a von der Basis unabhängig. Mit Hilfe dieser Beziehungen leitet er seine geometrischen Formeln ab, die er zum Aufbau seiner Mechanik benötigt, doch weist er auch oft auf die Gleichungen von Lobatchewsky hin.

In dem ersten Teile seiner abstrakten Mechanik, der Kinematik, behandelt er die Zusammensetzung und das Zerlegen von Geschwindigkeiten auf die gleiche Weise, wie er es zu Beginn seiner Geometrie tat. Mit Hilfe der gewonnenen, geometrischen Gleichungen untersucht er dann gleichgerichtete und entgegengesetzte Translationen, Rotationen, deren Achsen

---

[1]) Lamarle, Démonstration d'un postulatum d'Euclide (Bulletin de l'Académie royale de Belgique t. XXIII 1856 p. 413).

in der gleichen oder in verschiedenen Ebenen liegen, und die Zusammensetzung von Rotation und Translation.

In der Statik geht er von folgenden Gesichtspunkten aus: Die Zusammensetzung von Kräften, die sich in einem Punkt schneiden, unterscheidet sich in nichts von der Zusammensetzung von Geschwindigkeiten, daher gelten in seiner abstrakten Mechanik für diesen Fall die gleichen Gesetze wie für die Euklidische. Die dann folgende Ableitung des Hebelgesetzes möge als Beispiel seiner Methode und zum Vergleich mit früheren und späteren Versuchen, das gleiche Problem zu lösen, ausführlicher mitgeteilt werden. An dem Hebel AOB (Abb. 8) greifen an seinen Enden senkrecht zu

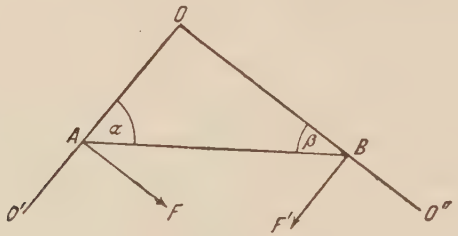

Abb. 8.

seinen Armen die beiden Kräfte F und F′ an. Um die Bedingung des Gleichgewichts feststellen zu können, werde F in zwei Komponenten längs O′A und AB zerlegt. Die Kraft längs OA′ wird durch den Widerstand des festen Punktes O aufgehoben und die Kraft längs AB hat den Wert $\frac{F}{\sin\alpha}$; ebenso kann man F′ in eine Komponente längs O″B zerlegen, die durch den Widerstand des festen Punktes O aufgehoben wird, und in eine Komponente längs AB von der Größe $\frac{F'}{\sin\beta}$. Diese beiden Kräfte müssen sich aufheben, und sie ergeben die Bedingung:

$$\frac{F}{\sin\alpha} = \frac{F'}{\sin\beta}$$

für das Gleichgewicht.

Nun ist[1]):

$$\frac{\sin\alpha}{\sin\beta} = \frac{e^{OB} - e^{-OB}}{e^{OA} - e^{-OA}} = \frac{\text{bog } OB}{\text{bog } OA}.$$

Am Hebel herrscht demnach Gleichgewicht, wenn

$$F : F' = \text{bog } OB : \text{bog } OA$$

ist, d. h. wenn die wirkenden Kräfte den mit den Hebelarmen beschriebenen Kreisen umgekehrt proportional sind, aber nicht umgekehrt proportional den Hebelarmen wie in der Euklidischen Geometrie. Im Anschluß daran erörtert er die Zusammensetzung einer beliebigen Anzahl beliebig gerichteter Kräfte, die in gleichen oder in verschiedenen Ebenen angreifen. Bei der Anwendung des Prinzips der Arbeit und der virtuellen Verschiebungen weist er auf die Ableitung von Lagrange[2]) über den Flaschenzug hin, die unabhängig vom Parallelenaxiom durchgeführt ist.

In einem letzten Teile der Dynamik geht de Tilly von der Formel für die Kraft

$$F = m\frac{dv}{dt}$$

aus, die augenscheinlich vom Parallelenpostulat nicht beeinflußt wird. Die Zusammensetzung und Zerlegung von Kräften, die sich aus dem Vorgehenden ergeben, benutzt er zum Lösen bestimmter dynamischer Aufgaben, z. B. die Kraft oder die Kräfte zu finden, die eine Verschiebung in einem ebenen, starren, materiellen System hervorbringen.

Mit Recht hat de Tilly seine Arbeit als abstrakte Mechanik bezeichnet, da sich erst durch Einsetzen spezieller Werte in die Formeln das mechanische Gesetz für eine be-

---

[1]) Lobatchewsky, Géométrie imaginaire Crelle Journal XVII 1837 p. 299. Dabei ist bog x der Umfang eines Kreises vom geradlinigen Radius x.

[2]) Lagrange, Mécanique analytique S. 21—23.

stimmte Geometrie ableiten läßt. Man muß auf Grund der Euklidischen Geometrie

$$\text{bog a} = 2\pi a \text{ [1]}$$

und

$$\text{eq a} = 1 \text{ [2]},$$

auf Grund der Bolyai-Lobatchewskyschen Geometrie

$$\text{bog a} = \pi\left(e^{a} - e^{-a}\right) \text{ [3]}$$

$$\text{eq a} = \frac{1}{\sin \Pi(a)} \text{ [4]}$$

setzen, wobei $\Pi(a)$ der zum Lote a zugehörige Parallelenwinkel ist. Wie sich z. B. beim Hebel dann leicht nachweisen läßt, erhält man dann die speziellen Formeln für die Euklidische bezw. nichteuklidische Mechanik. Die Arbeiten von Beltrami[5] 1868/69 zeigen, daß nicht nur, wie durch frühere Untersuchungen bekannt, die Flächen mit konstanter positiver Krümmung durch die Kugel, sondern auch die Flächen konstanter negativer Krümmung durch die Pseudosphäre dargestellt werden können. Die auf ihnen abgebildete Geometrie ist dann mit der nichteuklidischen identifizierbar. Doch ist de Tilly[6] der Ansicht, daß sich dieses Ergebnis mit weniger Aufwand an Arbeit aus seiner „mécanique abstraite“ hätte ableiten lassen. Ersetzt man in seiner Abhandlung „Ebene“

---

[1]) vgl. S. 27.

[2]) vgl. S. 25.

[3]) Liebmann, Nichteuklidische Geometrie 2. Aufl. S. 96.

[4]) Bonola, Die nichteuklidische Geometrie S. 122.

[5]) Beltrami, Saggio d'interpretatione della geometria non euclidea Giornale di matem. t. VI 1868 p. 284—312); Beltrami, Teoria fondamentale degli spazii di curvatura costante p. 232—235 (Ann. d. matem. (2) II 1868/69); Beltrami, Essai d'interprétation de la géométrie non euclidienne (übersetzt von Houël) (Ann. scient. d. l'école normale sup. VI 1869 p. 251—288); Beltrami, Formules fondamentales de cynématique dans les espaces de courbure constante (übersetzt von Houël) (Bull. d. Scienc. math. et astron. t. 10 1876 p. 233—240).

[6]) de Tilly, Note sur les surfaces à courbure moyenne constante (Bull. d. l'acad. de Belgique II t. 30 1870 p. 28—37).

durch „Fläche konstanter Krümmung“ und „Gerade“ durch „geodätische Linie“, so gelten seine Gleichungen auch ohne weiteres für diese Flächen. Dann ist die Größe eqa auf der ganzen Fläche konstant, und a hängt nur noch von der Krümmung ab. Die mechanischen Gleichungen bleiben ungeändert, erst bei der Integration muß man sich entscheiden, ob man das Krümmungsmaß $K \gtreqless 0$ nehmen will, d. h. ob die Ebene, deren Mechanik man aufbauen will, auf einer Pseudosphäre, Ebene oder Kugel abwickelbar sein soll.

Gleichzeitig mit de Tilly beschäftigt sich, allerdings in ganz anderer Weise, der Italiener A. Genocchi[1]) mit den Zusammenhängen zwischen nichteuklidischer Geometrie und Mechanik. Bei den mechanischen Fragen richtet er sein Hauptaugenmerk auf das Gleichgewicht am Hebel, und es gelingt ihm, die Beziehungen zwischen den möglichen Lösungen und den zugrunde gelegten Geometrien aufzudecken. Von Genocchi rühren zwei Arbeiten über diesen Gegenstand her, von denen nach seinem eigenen Ausspruch die zweite eine Berichtigung und Ergänzung der ersten darstellt. Einige Sätze über Addition gleichgerichteter Kräfte, Subtraktion entgegengesetzt gerichteter, Verschieben der Kraft in der Kraftrichtung schickt er seiner ersten Abhandlung als unbeweisbare Sätze voraus. In der zweiten gibt er die Foncenexsche Ableitung für das Kräfteparallelogramm, der er fast wörtlich folgt. Er gelangt gleichfalls zu der Schlußgleichung

$$f(a) = 2\cos\frac{a}{2}.$$

---

[1]) Genocchi, Intorno ad una dimostrazione di Daviet de Foncenex (Atti della R. Academia di Torino t. IV 1868/69 p. 323—325); Genocchi, Dei primi principi della meccanica e della geometria in relazione al postulato d'Euclide (Memor. d. Societa italiana (3) t. II 1869 p. 153—189); Genocchi, Deux lettres de M. A. Genocchi à M. A. Quetelet sur diverses questions mathématiques (Bull. d. l'Acad. de Belgique (2) t. 36 p. 181—192, 123—139 1873); Genocchi, Sunta d'una memoria di A. Genocchi intorni ai Principii della geometria (Atti della R. Acad. di Torino XII 1876/77 p. 489—494); Genocchi, Sur un mémoire de Daviet de Foncenex (Memor. d. Reale Acad. d. Torino (2) XXIX 1873 p. 365—404).

Dann geht er zur Hebelgleichung über, die er auch nach dem Beispiele von Foncenex findet, und deren Resultat er in der Form von d'Alembert und Laplace angibt. Dieses solle aber so umgeformt werden, daß die Beziehungen zwischen Geometrie und Mechanik klar zutage treten.

An dem Hebel (Abb. 9) AA′ greifen in derselben Ebene die beiden Kräfte P senkrecht in gleicher Richtung an. Fügt

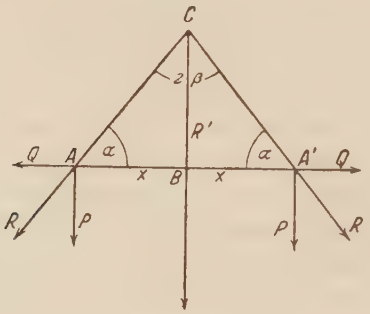

Abb. 9.

man in A bezw. A′ die beiden gleichgroßen und entgegengesetzten Kräfte Q hinzu, so ist nach dem vorhergegangenen Beweis

$$R = \frac{P}{\sin \alpha} = \frac{Q}{\cos \alpha}.$$

Die beiden Resultanten schneiden sich, nach C verschoben, unter dem Winkel 2β; bezeichnet man ihre Resultante mit R′, so wird

$$R' = 2R \cos \beta = 2P \frac{\cos \beta}{\sin \alpha}.$$

Man erhält also eine Beziehung zwischen den Winkeln des Dreiecks ABC. Setzt man $AB = x$, so wird

$$P \varphi(x) = 2P \frac{\cos \beta}{\sin \alpha}$$

$$\varphi(x) \sin \alpha = 2 \cos \beta.$$

Nach dem Vorbild von d'Alembert hat diese Gleichung die Lösung (S. 13 Anm. 4)

$$\frac{1}{2}\varphi(x) = \frac{e^{hx\sqrt{-1}} + e^{-hx\sqrt{-1}}}{2} = \cos h\,x,$$

folglich:

$$\cos\beta = \cos h\,x \sin\alpha.$$

h muß eine Konstante sein. Der Lösung von Foncenex entspricht der Wert $h = 0$. Setzt man $h = \frac{i}{r}$ bei reellem r, so erhält man die Lobatchewskysche Geometrie, für $h = \frac{1}{r}$ bei reellem r, die Geometrie von Riemann.

Einen komplexen Wert für $h = a + bi$ einzusetzen, wäre unmöglich, denn $\cos h\,x$ würde dann imaginär, und da $\sin\alpha$ und $\cos\beta$ reell sind, hätte dann die Lösung $\cos\beta = \cos h\,x \sin\alpha$ keinen Sinn. Aber auch nicht alle reellen Werte von h sind zulässig. Angenommen, die Hebellänge wäre $x = \frac{\pi}{2h}$, dann wäre die Resultante 0. Ebenso entspricht negativen Werten von h eine negative Resultante. Die beiden letzten Annahmen sind demnach zu verwerfen. Bei seinen Ausführungen betont Genocchi wiederholt die Unabhängigkeit vom Parallelenpostulat. Damit hat er als erster ein mechanisches Gesetz gleichzeitig für die drei wesentlichen Geometrien dargestellt. Er sagt sogar: Setzt man das Archimedische Prinzip (Hebelgesetz) voraus, so kann man darauf die Euklidische Geometrie aufbauen, während umgekehrt Fourier[1]), Lagrange[2]), Huygens[3]) und Poinsot[4]) gezeigt haben, daß man unter Voraussetzung des Parallelenaxioms das Archimedische Prinzip

---

[1]) Fourier, Oeuvres t. II p. 478—491, t. XI p. 3—6.

[2]) J. L. Lagrange, Mécanique analytique p. 3—6.

[3]) C. Huygens, Demonstratio Aequilibris bilancis (Opera varia I p. 282—286).

[4]) L. Poinsot, Eléments de Statique. 12ième édition, Paris 1877, p. 178—184.

ableiten kann[1]). Genocchi ist sogar der Ansicht, daß sich eher das Archimedische Prinzip als das Parallelenpostulat beweisen ließe.

Die Untersuchungen von de Tilly und Genocchi, die ihre Resultate unabhängig voneinander fanden, haben zu der Entwicklung einer nichteuklidischen Mechanik wesentlich beigetragen. de Tilly entwickelt eine abstrakte Geometrie und Mechanik, deren Formeln durch Spezialisierung einer bestimmten Raumform angepaßt werden können.

Genocchi gelang es, die Foncenexschen Hebelgleichungen geometrisch zu deuten.

Schering[2]) beschäftigt sich mit einem ganz speziellen Gebiete der Mechanik: er untersucht die Schwerkraft im Gaußschen[3]) sowie im mehrfach ausgedehnten Gaußschen und Riemannschen Raum. Gleichzeitige Untersuchungen von Dirichlet über den gleichen Gegenstand sind nicht veröffentlicht worden. Scherings Arbeit ist eine rein mathematische Untersuchung, deren Resultate mechanisch nicht gedeutet werden und der nach seiner eigenen Ansicht die Bedeutung zukommt, daß die Untersuchung solcher allgemeinen Gesetze das Gebiet der reinen Analysis erweitert. Seine Nachfolger Fresdorf[4]) und Opitz[5]) untersuchen beide die Potentialfunktion im Gaußschen und Riemannschen Raum, und

---

[1]) Bonola gibt diesem folgende Fassung: „Ein in seinem Mittelpunkt gestützter Hebel ist im Gleichgewicht, wenn man an einem Ende das Gewicht 2P anhängt und am anderen Ende einen neuen Hebel in seinem Mittelpunkt aufhängt, der an jedem Ende das Gewicht P trägt". Bonola, Die nichteuklidische Geometrie Anhang II S. 212.

[2]) E. Schering, Die Schwerkraft im Gaußischen Raum (Nachr. d. Kgl. Ges. d. Wiss. zu Göttingen 1870 S. 311—321); E. Schering, Die Schwerkraft in mehrfach ausgedehnten Gaußischen und Riemannschen Räumen (Nachr. d. Kgl. Ges. d. Wiss. zu Göttingen 1873 S. 149—159).

[3]) Im Gaußischen Raume gilt die Bolyai-Lobatchewskysche Geometrie.

[4]) Fresdorf, Über die Geometrie und die Potentialfunktion im Gaußischen und Riemannschen Raume (Diss. Göttingen 1873).

[5]) Opitz, Einige Sätze über die Anziehung in mehrfach ausgedehnten Gaußischen und Riemannschen Räumen (Diss. Göttingen 1881).

zwar annähernd so, daß die Resultate Fresdorfs durch Opitz vom dreidimensionalen auf den n-fach ausgedehnten Raum erweitert werden. Ihren mechanischen Betrachtungen schicken beide wie de Tilly eine Ableitung der wichtigsten geometrischen Formeln voraus, und wie dieser Gelehrte leiten sie sie allgemein ab, d. h. es tritt in ihren Gleichungen eine den Raum charakterisierende Konstante auf, die reell für den Riemannschen, rein imaginär für den Gaußschen und gleich Null für den Euklidischen wird. Beide gehen dann zum Gaußschen[1]) Satz über: Ist do das Flächenelement einer vollkommen geschlossenen Fläche, T der Innenraum der Flächen, dT ein Volumenelement, N die nach dem Innenraum T positiv gerichtete Normale N, V die Potentialfunktion einer beliebig im Raum verteilten Masse von der Dichte μ, so ist

$$\int \frac{\partial V}{\partial N} d\sigma = 4\pi \int \mu \, dT.$$

Macht man jetzt die Annahme, daß die Gesamtheit der Druckkräfte, die von einem Massenpunkt auf konzentrisch um ihn beschriebene und mit gleich dichter Masse belegte Kugelflächen ausgeübt werden, für jede Kugelfläche gleichgroß ist, daß also wirkender Druck und Kugelfläche entgegengesetzt proportional sind, so kann man durch Einführung der vorher gewonnenen geometrischen Beziehungen für das Flächenelement das Newtonsche Potential berechnen, das nach Integration den Wert $V = m\varepsilon \operatorname{ctg} \varepsilon r + \text{Const}$ erhält, wobei m die im Zentrum der Kugel konzentriert gedachte Masse bedeutet. Aus dieser Gleichung ergibt die Laplace-Poissonsche Gleichung sowohl für den einfach als auch für den mehrfach ausgedehnten Gaußschen und Riemannschen Raum die Gleichung

$$\Delta V = -4\pi\mu \quad (\mu = \text{Massendichte}).$$

Besondere Beziehungen der Potentialfunktion erhält man, wenn man ihr Verhalten in der Nähe von Flächen, Linien und

[1]) Gauß' Werke Bd. 5 S. 9 Theorem 4.

Punkten untersucht oder sich im n-fach ausgedehnten Raume Massen von weniger als n-facher Ausdehnung befinden.

Die Grundlagen einer projektiven Auffassung der Mechanik versucht Lindemann[1]) zu geben. Doch beschränkt er sich darauf, unter gewissen noch zu nennenden Voraussetzungen die Theorie der unendlich kleinen Bewegungen eines freien unveränderlichen Systems und die Kräfte, welche an einem solchen angreifen, vom projektivischen Standpunkt aus zu erörtern, und dabei gibt er gleichzeitig eine Theorie der unendlich kleinen Transformationen einer Fläche 2. Ordnung in sich selbst. Mechanische und rein algebraische Probleme werden also hier in Zusammenhang gebracht und gemeinsam erörtert. Dabei definiert er nach dem Vorbilde Caleys[2]) als Entfernung zweier Punkte den mit einer willkürlich, aber fest gewählten Konstanten multiplizierten Logarithmus des Doppelverhältnisses, welches durch sie und die Schnittpunkte ihrer Verbindungslinie mit der Fundamentalfläche bestimmt ist, und analog als Winkel zweier Ebenen den mit einer anderen, aber ebenfalls fest gewählten Konstanten c' multiplizierten Logarithmus des Doppelverhältnisses, welches sie mit den beiden, von ihrer Schnittlinie an jene Fläche gehende Tangentenebenen bilden. Die Fundamentalfläche wird dabei zunächst keiner Voraussetzung unterworfen, sie kann geradlinig oder nicht, reell oder imaginär sein. Die so begründete Maßbestimmung unterscheidet sich von den tatsächlich gegebenen Voraussetzungen dadurch, daß eine gerade Linie zwei unendlich ferne Punkte hat, was mit der Voraussetzung der Geometrie von Bolyai-Lobatchewsky: Durch einen Punkt kann

---

[1]) Lindemann, Über unendlich kleine Bewegungen starrer Körper bei allgemeiner projektivischer Maßbestimmung (Sitzungsber. d. phys.-med. Sozietät zu Erlangen Heft 5 1872/73 S. 122—129); Lindemann, Über unendlich kleine Bewegungen und über Kraftsysteme bei allgemeiner projektivischer Maßbestimmung (Mathematische Annalen VII 1874 S. 56 bis 143).

[2]) Caley, A sixth memoir upon quantics (Philos. Transactions vol. 149 1859 p. 61—90).

man zu einer Geraden stets zwei Parallele ziehen, gleichbedeutend ist. Nachdem er einige geometrische Sätze vorangeschickt hat, geht er zur Mechanik starrer Körper über. Da er sich bei seinen Untersuchungen auf die Betrachtung unendlich kleiner Bewegungen beschränkt, so braucht er nur unendlich kleine Transformationen der Fundamentalfläche in sich selbst zu untersuchen. Er betrachtet dann die Zusammensetzung dieser unendlich kleinen Bewegungen und die projektivischen Schraubenlinien, die dadurch definiert sind, daß sie durch diejenige lineare Transformation, welche die betrachtete Bewegung darstellt, in sich übergeführt werden. Bei den unendlich kleinen Bewegungen treten metrische Relationen zwischen den erwähnten Komplexen auf, auf die Lindemann im folgenden näher eingeht. Infolge der Verallgemeinerung der Maßbestimmung werden alle auf Drehungen und Winkelrotationen bezüglichen Sätze wenig oder gar nicht geändert. Infolgedessen wird der Winkel unter dem zwei sich schneidende Kräfte auf einen Punkt wirken, nach genau demselben Verhältnis geteilt, wie dies bei speziellen Maßangaben geschieht; die Konstruktion mit Hilfe des Parallelogramms ist jedoch nur für unendlich kleine Strecken erlaubt. Eine Kraft kann demnach nur durch eine unendlich kleine ihr proportionale Strecke dargestellt werden. Infolgedessen kann er an die Spitze seiner Betrachtungen folgenden Satz stellen: Die Zusammensetzung der Kräfte geschieht nach denselben Gesetzen wie die der unendlich kleinen Rotationen. Die Untersuchungen über zwei in einem Punkt angreifenden Kräfte, die sich zu einer Resultante vereinigen lassen, werden auf ein Kraftsystem ausgedehnt. Die Aufstellung der Bedingungen des Gleichgewichts bei virtuellen Verschiebungen führt ihn auf projektivischem Wege zu der Bedingungsgleichung

$$\sum \Pi \mathrm{P} \cos(\Pi, \mathrm{P}) = 0,$$

in der P die angreifenden Kräfte und Π die virtuellen Verschiebungen darstellt.

Gleichfalls vom projektiven Standpunkt geht Study[1]) aus bei seinen Untersuchungen über die konstruktive Darstellung und Zusammensetzung von Dynamen, worunter er nach dem Vorbilde von Plücker Systeme von Kräften versteht, die an einem starren Körper angreifen. Die Arbeit ist für die nichteuklidische Mechanik insofern wichtig, als die projektivische Geometrie neben der Euklidischen auch in gewissem Sinne die nichteuklidische Geometrie umfaßt, und daher die auf projektivischer Grundlage erhaltenen Sätze ohne weiteres auch im nichteuklidischen Raum gelten. An Stelle des Parallelogramms der Kräfte treten bei ihm neue Figuren auf, die die Zusammensetzung von Kräften, die an einem Punkte oder an einem starren Körper angreifen, veranschaulichen. Zu diesen Ergebnissen ist Study ursprünglich auf dem Umwege über die nichteuklidische Geometrie gelangt, doch gibt er Näheres darüber nicht an. Die Arbeit, die im wesentlichen rein geometrisch ist, behandelt im Anhange die „Grundzüge einer neuen Methode der Kinematik", deren Hauptgegenstand das Studium der Mannigfaltigkeiten von $\infty^r (r = 1, 2 \cdots 6)$, Lagen eines Körpers im Raum, d. h. von relativen Lagen dieses Körpers zu einem andern, unbeweglich gedachten, betreibt. Die zum Teil auf Grund gruppentheoretischer Untersuchungen gefundenen geometrischen Transformationen geben dem Begriffsinhalt der nichteuklidischen Geometrie im Raume eine neue erweiterte Deutung. Study weist dann nach, daß den Grundbegriffen der nichteuklidischen, insbesondere elliptischen Geometrie ebenso einfache mit elementaren Hilfsmitteln zu erklärende Begriffe an die Seite gestellt werden können wie in der projektivisch-enklidischen, und zwar wieder auf Grund gruppentheoretischer Untersuchungen. Seine Betrachtungen führen ihn zu dem Ergebnis, daß zwischen seinen kinematischen Untersuchungen auf projektivischer Grundlage und der nichteuklidischen Geometrie insofern ein Zusammenhang besteht,

---

[1]) Study, Die Geometrie der Dynamen (Dtsche. Math.-Ver. 8 1900 S. 204—216); Study, Die Geometrie der Dynamen, Leipzig 1903.

als die in der letzteren auftretenden Begriffsverkettungen nur anders gedeutet zu werden brauchen, um kinematische Sätze zu ergeben. Die nichteuklidische Geometrie gewinnt dadurch eine neue Bedeutung, denn es muß als wunderbare Erscheinung betrachtet werden, daß logisch gleiche Schlußfolgerungen in verschiedenen mathematischen Disziplinen vorkommen.

Unter dem Einfluß von Study entstand eine Arbeit von Blaschke[1]), die nach Absicht des Verfassers auch als Einführung in Studys kinematische Methode gelten soll. Bei seiner Untersuchung wird er von dem Gedanken[2]) geleitet, „daß sich die ebene Kinematik einordnen läßt in die projektive Geometrie des Raumes. Dabei kommt man auf eine projektivische Maßbestimmung, die durch einen Grenzübergang aus der nichteuklidischen, und zwar der elliptischen Maßbestimmung hervorgeht".

Die Arbeiten von Lindemann, Study und seinen Nachfolgern treiben keine nichteuklidische Mechanik im eigentlichen Sinne; ihre Absicht besteht darin, nachzuweisen, wie sich Punkte, Gerade und Flächen bei Verschiebungen, Bewegungen und Umlegungen in ihren gegenseitigen Beziehungen ändern. Dabei wird der von Klein entdeckte Zusammenhang zwischen nichteuklidischer Geometrie und projektiver Maßbestimmung benutzt. Es lassen sich dann die Bewegungen im nichteuklidischen Raume auffassen als projektive Transformationen, bei denen die Fläche zweiter Ordnung unverändert bleibt.

Eine umfassendere Darstellung der nichteuklidischen hyperbolischen Mechanik gibt Killing[3]), der dabei von dem Gedanken ausgeht, daß in kleinen Gebieten die gebräuchlichen Sätze der Mechanik auch unter Voraussetzung anderer Geo-

[1]) W. Blaschke, Euklidische Kinematik und nichteuklidische Geometrie (Zeitschr. f. Math. u. Phys. 60 1912 S. 61—91).

[2]) W. Blaschke S. 61.

[3]) Killing, Die Mechanik in den nichteuklidischen Raumformen (Schulprogramm Brilon 1883 und Journal für reine und angew. Math. 98 1885).

metrien und in mehrdimensionalen Räumen gelten müssen. Seine Resultate werden auf Grund der Koordinaten von Weierstraß aufgestellt, die Killing zuerst in großem Umfange [1]) benutzt hat. An Stelle der rechtwinkligen Koordinaten x und y und des Abstandes vom Koordinatenanfangspunkt treten folgende Größen auf (Abb. 10):

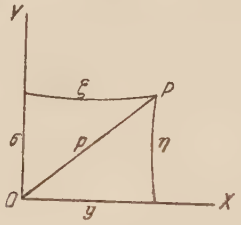

Abb. 10.

$$x = \mathfrak{Sin}\,\xi, \quad y = \mathfrak{Sin}\,\eta, \quad p = \mathfrak{Cof}\,r,$$

zwischen denen, wie die Figur zeigt, die Beziehungen

$$p = \mathfrak{Cof}\,r = \mathfrak{Cof}\,\eta\,\mathfrak{Cof}\,y = \mathfrak{Cof}\,\xi\,\mathfrak{Cof}\,\sigma,$$
$$x = \mathfrak{Sin}\,\xi = \mathfrak{Sin}\,y\,\mathfrak{Cof}\,\eta,$$
$$y = \mathfrak{Sin}\,\eta = \mathfrak{Sin}\,\sigma\,\mathfrak{Cof}\,\xi$$

bestehen.

Dieses von der Ebene auf den Raum übertragene Koordinatensystem legt Killing seinen Ausführungen zugrunde. Alle Begriffe, die weder vom Parallelenaxiom noch von der Unendlichkeit des Raumes abhängen, wie Kraft, Masse, Dichte, erleiden keine Veränderung. Das Parallelogramm der Bewegungen und der Kräfte behalten für unendlich kleine Gebiete ihre Gültigkeit. Sie wird jedoch für größere Gebiete nicht untersucht. Auch die Bewegungsgleichungen erleiden keine Veränderung, und sie lassen sich daher ohne weiteres

---

[1]) Killing, Über zwei Raumformen mit konstanter positiver Krümmung (Journal für reine und angew. Math. 86 1879); Killing, Die Rechnung in den nichteuklidischen Raumformen (Journal für reine und angew. Math. 89 1880); Killing, Die nichteuklidischen Raumformen in analytischer Behandlung, Leipzig 1885.

auch durch die neuen Koordinaten ausdrücken. Wendet man diese Gleichungen auf die Planetenbahnen an, indem man die dem Newtonschen Gravitationsgesetz zugrunde liegende geometrische Anschauung analytisch ausdrückt, so wird man zu dem Ergebnis geführt, daß der doppelte Radius Vektor in gleichen Zeiten gleiche Räume bestreicht, daß die Bahn eine Ellipse ist, in deren einem Brennpunkt die Sonne steht, und daß sich für die Umlaufszeit die Beziehung

$$T^2 = \frac{4\pi k^2 \sin^3 \frac{a}{k} \cos \frac{a}{k}}{\mu}$$

ergibt, wobei k^2 der reziproke Wert des Krümmungsmaßes und μ die Masse ist. Um die reibungslose Bewegung eines Punktes zu bestimmen, der gezwungen ist, sich auf einer Kurve zu bewegen, ersetzt er diese Forderung durch die gleichwertige: Soll ein Punkt sich ohne Reibung auf einer Kurve bewegen, so kann man diese Bedingung durch eine Kraft erfüllen, die in Richtung der Normalen wirkt und deren Größe derart ist, daß der Punkt auf der Kurve bleiben muß. Diese Bewegungsgleichungen, auf ein Kugelpendel übertragen, führen zu den Ergebnissen, daß der Isochronismus der Schwingungen auch für nichteuklidische Raumformen gilt. Dehnt man die Bewegungsgleichungen auf beliebig viele Punkte aus, so erhält man die Gültigkeit des Hamiltonschen Prinzips [1])

$$\int (\partial T + U') = 0$$

auch für nichteuklidische Raumformen. Auch der Satz der lebendigen Kraft und das d'Alembertsche Prinzip erfahren keine Änderung. Die Schwerpunktsätze dagegen verlieren ihre Gültigkeit und werden durch sechs Flächensätze ersetzt, die man auf Grund des d'Alembertschen Prinzips ableiten kann, wenn es möglich ist, das System längs jeder Koordinaten-

[1]) vgl. Kirchhoff, Vorlesungen über mathematische Physik S. 27.

achse zu verschieben und um jede zu drehen. Die Bewegungsgleichungen lassen sich dann, da die benutzten geometrischen Begriffe von der Dimension unabhängig sind, auf den n-fach ausgedehnten Raum übertragen. Die Erweiterung der Newtonschen Gesetze gibt — allerdings in anderer Form — die Resultate Scherings wieder. Killing kommt dabei zu dem Ergebnis, daß die Eigenschaften des Potentials sich nicht ändern. Während aber in den Euklidischen Raumformen das Potential und die Kraft für das Unendlichferne gleich 0 werden und die Entwicklung für $\frac{1}{r}$ nur positive Potenzen enthält, für deren niedrigste die Koeffizienten sofort angegeben werden können, so wird im Lobatchewskyschen Raum ungerader Dimension das Potential im Unendlichen gleich der mit einer gewissen Konstanten multiplizierten Masse.

Gleichzeitig mit Killing veröffentlicht Most[1]) eine absolute Mechanik, die er, wie de Tilly, auf einer absoluten Geometrie aufbaut. Er schickt ihr einige Definitionen über die Eigenschaften des Raumes, der Geraden und Ebenen voraus. „Eine Linie, welche von einer Geraden überall denselben Abstand hat, wird Parallele genannt. Zwei Parallellinien, welche von einer Geraden zu beiden Seiten gleich abstehen, heißen konjugierte Parallellinien.“ Er führt dann das Verhältnis entsprechender Parallelenstücke ein, doch im Gegensatz zu dem belgischen Verfasser spezialisiert er die vom Abstande abhängige Funktion so, daß die Riemannsche und Lobatchewskysche Geometrie noch nebeneinander bestehen.

Die Gleichungen, die dann entwickelt werden, zeigen vollste Übereinstimmung, sie gehen ineinander über, wenn die Konstante k im sphärischen Raum durch die Konstante ik im pseudosphärischen ersetzt wird. Seine Mechanik behandelt nur den Satz vom Parallelogramm der Kräfte und die Bedingungen des Gleichgewichts am Hebel. Nachdem er einige

[1]) Most, Neue Darlegung der absoluten Geometrie und Mechanik mit Berücksichtigung der Frage nach den Grenzen des Weltenraums, Progr. Koblenz 1883.

Sätze über Zusammensetzung der Kräfte in besonderen Fällen vorausgeschickt hat, führt ihn die Berechnung der Resultante bei zwei gleichgroßen unter dem Winkel 2α sich schneidenden Kräften P auf die bekannte Gleichung

$$f(\alpha)^2 = 2 + f(2\alpha).$$

Setzt man darin

$$f(\alpha) = 2\psi(\alpha) \text{ und } f(2\alpha) = 2\psi(\alpha),$$

so erhält man

$$4\psi(\alpha)^2 = 2 + 2\psi(2\alpha),$$
$$2\psi(\alpha)^2 = 1 + \psi(2\alpha)$$

mit den beiden Lösungen:

1. $\psi(2\alpha) = \cos 2p\alpha$

und

2. $\psi(2\alpha) = \frac{1}{2}\left(e^{2q\alpha} + e^{-2q\alpha}\right)$,

deren Konstanten sich bestimmen lassen, wenn man berücksichtigt, daß für $2\alpha = \pi$ die Resultante $R = 0$ wird. Dann ist:

1. $\cos \pi p = 0$, also $p = \frac{1}{2}$;

2. $e^{q\pi} + e^{-q\pi} = 0$, also $q = \frac{1}{2}i$.

Beide Lösungen sind demnach identisch und ergeben eindeutig

$$R = 2P \cos \alpha.$$

Die Konstruktion des Parallelogramms der Kräfte gestattet selbstverständlich keine Verallgemeinerung. Er leitet die Bedingung für das Gleichgewicht am Hebel ab, an dem zwei verschieden große Kräfte P und Q angreifen. Ist l die Entfernung eines beliebigen Punktes vom Angriffspunkt der Resultierenden und p und q die Hebelarme, so lautet die Gleichung

$$R\psi(l) = P\psi(l + p) + Q\psi(l - q),$$

deren Lösung Most nicht angibt. Ebenso wie die Kräfte

lassen sich Drehungen zusammensetzen. Einige Gebiete der nichteuklidischen Mechanik hat Andrade[1]) behandelt. Erst nach Abschluß seiner Arbeit: „Leçons de mécanique“ geht ihm die Mitteilung zu, daß schon zwanzig Jahre vor ihm de Tilly ein leider „recht seltenes“ Buch über nichteuklidische Mechanik veröffentlicht hat. Aus derselben Quelle erfährt er, daß sich bei Genocchi die Mitteilung findet, daß vor Poisson ein unbekannter Verfasser aus Turin eine analytische Ableitung des Kräfteparallelogramms gegeben und dabei die Poissonsche Gleichung gefunden habe, er habe selbst bemerkt, daß seine Methode vom Parallelenpostulat unabhängig sei. Da diese Arbeit während der Anwesenheit Lagranges in Turin erschien, so folgert Andrade, daß diese Abhandlung auch von ihm herrühre, um so mehr, als der anonyme Verfasser nie mehr etwas veröffentlicht hat.[2])

Die Zusammensetzung zweier unter einem beliebigen Winkel 2α sich schneidender Kräfte führen ihn in bekannter Weise zu der Funktionalgleichung

$$f(\alpha + \beta) + f(\alpha - \beta) = f(\alpha) \cdot f(\beta),$$

die mit den Grenzbedingungen

$$f(0) = 0 \text{ und } f\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1$$

die einzige in der Ebene mögliche Lösung:

$$f(\alpha) = \cos\alpha$$

gibt. Die Hebelgleichung lautet auch bei ihm

---

[1]) J. Andrade, Statique noneuclidienne (Verh. d. 1. intern. Kongreß zu Zürich 1897 S. 250—253); J. Andrade, Sur la réduction des vecteurs et les propriétés métriques (Comptes rendus t. 125 1897 p. 394—396); J. Andrade, Le groupe d'équivalence et ses bases cynématiques (Comptes rendus t. 126 1898 p. 1775/76); J. Andrade, Leçons de mécanique physique p. I—IX note II, La statique et les trois géométries de Lobatchewsky, d'Euclide et de Riemann p. 360—391, Paris 1898.

[2]) Diese Angaben beziehen sich auf die Arbeit von Foncenex, der sich aber der Unabhängigkeit seiner Beweisführung vom Parallelenpostulat nicht bewußt war.

$$2\varphi(x)\varphi(y) = \varphi(x+y) + \varphi(x-y)$$

mit den Bedingungen $\varphi(0) = 1$ und $\varphi(y) > 1$.

Dabei wird die Resultante durch

$$R = 2\varphi(x)$$

gegeben, wobei, wie bei Genocchi (S. 30) ausführlich erläutert,

$$\varphi(x) = \frac{\cos\gamma}{\sin\alpha}$$

ist. In der Geometrie von Lobatchewsky setzt man

$$\varphi(x) = \frac{1}{\sin\Pi(x)}\,^{1}),$$

wobei $\Pi(x)$ der zum Abstande x zugehörige Parallelenwinkel ist. Man erhält

$$\varphi(x) > 1 \text{ mit der Lösung } \varphi(x) = \mathfrak{Cof}\frac{x}{k};$$

$$\varphi(x) < 1 \text{ gibt die Lösung } \varphi(x) = \cos\frac{x}{k}$$

in der Riemannschen Geometrie, während $\varphi(x) = 1$ das Ergebnis in Euklidischer Mechanik darstellen würde.

Andrade ist überhaupt der Ansicht, daß sich stets eine endliche Anzahl von Rotationen, sei es um einen Punkt oder eine Achse, zusammensetzen lassen können und zwar auf unendlich viele Art und Weisen, wenn man folgende Voraussetzungen macht: Sind A, B, C, D Kräfte, wobei unter Kraft ihr Vektor verstanden werden soll, so gelten folgende Beziehungen:

1. $A \dot{+} B = A_1$ (der Punkt soll den gemeinsamen Angriffspunkt andeuten).
   Hierdurch wird eine Kraft A_1 eindeutig definiert.
2. $A \dot{+} B = B \dot{+} A$ (kommutatives Gesetz).
3. $A \dot{+} (B \dot{+} C) = A \dot{+} B \dot{+} C$ (assoziatives Gesetz).

---

[1]) vgl. S. 28.

4. Sind beide Kräfte gleich gerichtet, so reduziert sich die vektorielle Addition auf eine algebraische.
5. Gleichgroße, entgegengesetzt gerichtete Kräfte heben sich auf.
6. Die Zusammensetzung sei stetig, d. h. ist ε eine variable Größe mit gleichem Angriffspunkt wie A, so soll stets

$$A + \varepsilon = A_1 \text{ für } \varepsilon \to 0 \text{ sein.}$$

7. Die Vektorenrechnung sei invariant, d. h. unabhängig vom umgebenden Weltraum, kann also gleichmäßig auf alle Geometrien Anwendung finden.

Da im Unendlichkleinen die Geometrie von Lobatchewsky mit der von Euklid identisch ist, müssen sich die virtuellen Geschwindigkeiten wie in der gewöhnlichen Mechanik zusammensetzen lassen. Ebenso wie man aus dem Euklidischen Postulat eine besondere Mechanik ableiten kann, so lassen sich umgekehrt mechanische Sätze aufstellen, die diesem gleichwertig sind:

1. Zwei gleichgerichtete Kräfte, die rechtwinklig zu einer Geraden angreifen, haben eine Resultante, die auf derselben Seite angreift und gleich ihrer Summe ist;

2. wenn in irgendeinem Raume rechtwinklig zu den Seiten eines beliebigen Dreiecks angebrachte Kräfte, die den Seitenlängen proportional sind, und in der Mitte der Seite angreifen, im Gleichgewicht sind, so muß der Raum ein euklidischer sein.

Einen besonderen Ausschnitt aus der nichteuklidischen Mechanik behandelt Francesco[1]). Bei seinen statischen Untersuchungen geht er nämlich von dem Gedanken aus, daß die notwendige und hinreichende Bedingung für das Gleichgewicht eines Systems dadurch gegeben wird, daß die Summe der virtuellen Arbeit verschwindet, und er stellt für diesen Fall die Bedingungsgleichungen auf. Seine Untersuchungen

[1]) Francesco, Alcuni problemi di meccanica in uno spazio a tre dimensioni di curvatura costante (Rendiconto di Napoli (3) t. VI 1900 p. 15, 153—155); Francesco, Atti della Reale Acad. di Napoli (2) X 1901 Nr. 4 u. 9.

über Zerlegung und Zusammensetzung von Kräften sowie über das Gleichgewicht am Hebel führen ihn zu den bekannten Resultaten. Eine eigenartige Berechnung der Resultante zweier gleicher Kräfte gibt Bonola[1]), der die Gleichung $R = 2Pf(\alpha)$ für spezielle Werte des Arguments berechnet. Man denke sich in O (Abb. 11), dem Angriffspunkt der Kräfte,

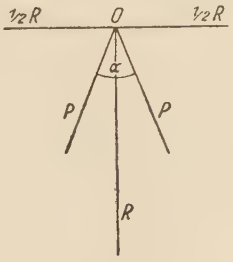

Abb. 11.

zwei gleichgroße Kräfte $\frac{1}{2}R$ senkrecht zu R angebracht. Man setze voraus, daß $\alpha = 45^0$ ist, dann kann man P als Resultante der Kräfte R und $\frac{1}{2}R$ auffassen und erhält

$$P = 2 \cdot \frac{1}{2} \cdot R \cdot f(45^0).$$

R als Resultante der beiden Kräfte P ist aber andererseits:

$$R = 2Pf(45^0),$$

woraus sich

$$f(45^0) = \frac{1}{2}\sqrt{2}$$

ergibt. Ist $\alpha = 60^0$, so bringe man in O eine Kraft R′ gleich und entgegengesetzt R an. Dieses System ist aus Symmetriegründen vollkommen im Gleichgewicht, daher

$$R = P = R'.$$

Außerdem ist

$$R = 2Pf(60^0),$$

[1]) Bonola, Die nichteuklidische Geometrie S. 217—221.

also

$$f(60^0) = \frac{1}{2}.$$

Für den Fall, daß $\alpha = 36^0$ ist, denke man sich in O fünf Kräfte P so angebracht, daß je zwei den Winkel 72^0 miteinander bilden (Abb. 12). Auch diese fünf Kräfte sind dann

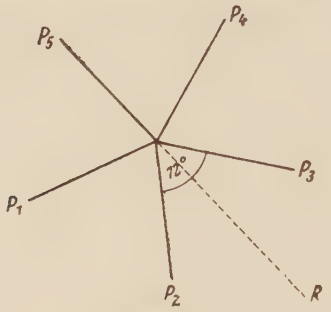

Abb. 12.

im Gleichgewicht. Dann ist

$$R = 2\,P\,f(36^0).$$

Ist R′ die Resultante von P_1 und P_4, so ist

$$R' = 2\,P\,f(72^0).$$

Da R′ gleich P_5, aber entgegengesetzt zu R verläuft, so ist

$$R = R' + P$$

oder

$$1.\quad 2\,P\,f(36^0) = 2\,P\,f(72^0) + P.$$

Nehmen wir P_1 mit P_2 und P_3 mit P_4 zusammen, so haben sie zwei Resultanten $2\,P\,f(36^0)$, die einen Winkel von 144^0 miteinander bilden und durch eine Resultante $4\,P\,f(36^0)\,f(72^0)$ ersetzt werden kann, die P_5 das Gleichgewicht halten muß. Daher wird:

$$2.\quad P = 4\,P\,f(36^0)\,f(72^0).$$

Aus 1. und 2. erhält man

$$f(36^0) = \frac{1+\sqrt{5}}{4};\ f(72^0) = \frac{-1+\sqrt{5}}{4}.$$

Diese Methode ließe sich weiter fortsetzen. Vergleicht man die erhaltenen Werte von $f(\alpha)$ mit den entsprechenden von $\cos\alpha$, so stimmen beide überein und legen die Schlußfolgerung nahe, daß $\cos\alpha$ und $f(\alpha)$ identisch seien. Eine Bestätigung dieser Vermutung läßt sich erhalten, wenn man sich in O (Abb. 13) vier gleichgroße Kräfte $P_1 = P_2 = P_3 = P_4$

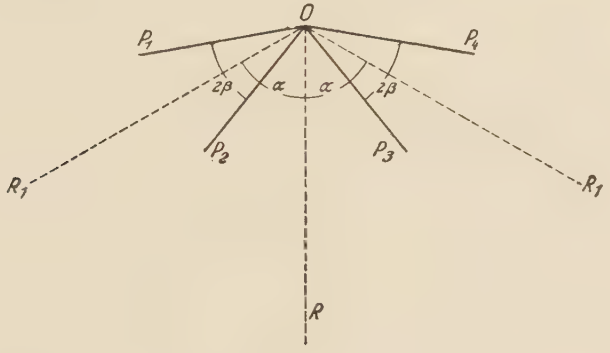

Abb. 13.

so angebracht denkt, daß

$$\sphericalangle P_1P_2 = \sphericalangle P_3P_4 = 2\beta$$

$$\sphericalangle P_2P_3 = 2(\alpha-\beta) \quad \text{und} \quad \sphericalangle P_1P_4 = 2(\alpha+\beta)$$

ist. P_1 mit P_2 und P_3 mit P_4 geben zwei Resultanten $R_1 = 2P\,f(\beta)$, die gemeinsam $R = 4P\,f(\alpha)\,f(\beta)$ ergeben. Anders zusammengesetzt, wird R:

$$R = 2P\,f(\alpha+\beta) + f(\alpha-\beta),$$

d. h. die Funktionalgleichung wird

$$2\,f(\alpha)\,f(\beta) = f(\alpha+\beta) + f(\alpha-\beta),$$

die der Gleichung

$$2\cos\alpha\cos\beta = \cos(\alpha+\beta) + \cos(\alpha-\beta)$$

entspricht. Dadurch und in Verbindung mit der gewonnenen Tabelle kann man

$$f(\alpha) = \cos\alpha$$

folgern, auch für Räume, in denen das Parallelenpostulat nicht gilt.

III. Zusammenstellung der bisher gefundenen Gesetze der nichteuklidischen Mechanik.

Die meisten der bis jetzt angeführten Arbeiten behandeln nur einzelne Fragen oder Gebiete der Mechanik auf Grund nichteuklidischer Geometrie. Es soll der Versuch gemacht werden, hauptsächlich im Anschluß an Liebmann[1]) eine zusammenhängende Darstellung der bisher veröffentlichten Lehren nichteuklidischer Mechanik zu geben[2]).

Da im Unendlichkleinen die nichteuklidische Geometrie mit der Euklidischen identisch wird, so kann man bei der Ableitung einer nichteuklidischen Mechanik von dem Gedanken ausgehen, daß im infinitesimalen Gebiet die euklidische Mechanik gilt. Eine Tatsache der euklidischen Mechanik, die von der Geometrie unabhängig ist, möge neben der Allgemeingültigkeit der Grundgesetze der Mechanik, die oben bewiesen wurde, der Ableitung der physikalisch-mechanischen Formeln vorangeschickt werden. Es müssen nämlich auch unter Zugrundelegung einer anderen geometrischen Weltanschauung die zu errechnenden Resultate unbeeinflußt bleiben, wenn man den Angriffspunkt der Kraft in seiner Wirkungsrichtung verschiebt. Es ist daher stets möglich, zwei verschieden große Kräfte P und Q so in ihrer Kraftrichtung zu verlegen, daß sie einen gemeinsamen Angriffspunkt haben, wenn sie in derselben Ebene wirken. Schneiden sie sich unter dem Winkel 2α,

[1]) Liebmann, Nichteuklidische Geometrie 1. Aufl. 1905, 2. Aufl. 1912.

[2]) Die zum Aufbau der Mechanik nötigen mathematischen Formeln sind dem eben erwähnten Werk von Liebmann entnommen.

so haben, wie bereits im I. Teile der Arbeit ausführlich dargestellt worden ist, eine Reihe von Untersuchungen vom 18. Jahrhundert an — allerdings unbeabsichtigt — gezeigt, daß gleichgültig, welche Geometrie zugrunde gelegt wird, sich stets

$$P : Q : R = \sin \alpha_2 : \sin \alpha_1 : \sin 2\alpha$$

verhält, wenn R die Größe der resultierenden Kraft und

$$\sphericalangle \alpha_1 + \sphericalangle \alpha_2 = \sphericalangle 2\alpha^{1}),$$
$$\sphericalangle \alpha_1 = \sphericalangle PR$$

und

$$\sphericalangle \alpha_2 = \sphericalangle QR$$

ist. Greifen dagegen zwei gleichgroße Kräfte senkrecht zu derselben Geraden an, so führen die ohne Zugrundelegung der Geometrie geführten Untersuchungen auf eine mehrdeutige Funktionalgleichung, deren Lösungen den verschiedenen Geometrien entsprechen. Das gleiche Ergebnis hätte man auch erhalten, wenn der Berechnung als Basis eine bestimmte

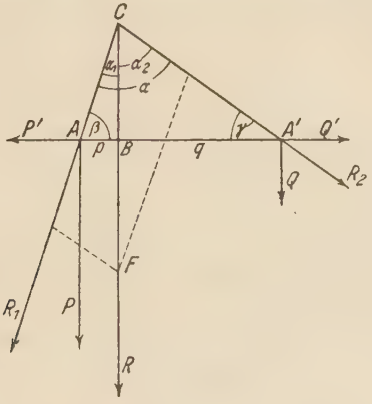

Abb. 14.

Geometrie untergelegen hätte. Es möge hier der allgemeinere Fall betrachtet werden, daß zwei verschieden große Kräfte P und Q senkrecht zu der Geraden A A′ angreifen (Abb. 14).

---

[1]) Daher ist auch die Zusammensetzung von Rotationen und Translationen von der Raumkrümmung unabhängig. Vgl. z. B. S. 12.

Die Gleichungen sollen dabei, wie stets im folgenden, unter Zuhilfenahme der Gleichungen der hyperbolischen Geometrie abgeleitet werden; aus dieser lassen sich dann durch Vertauschung der Streckenfunktionen die der sphärischen ableiten. Die Kraft P greife im Abstand p vom Unterstützungspunkt B, die Kraft Q im Abstande q an.

Das Gleichgewicht, das unter diesen Bedingungen am Hebel herrscht, wird nicht geändert, wenn in A und A′ zwei gleichgroße, aber entgegengesetzt gerichtete Kräfte

$$P' = Q'$$

angebracht werden. Nach dem bereits abgeleiteten Satz vom Parallelogramm der Kräfte bilden P′ und P eine Resultante R_1, Q und Q′ eine Resultante R_2, deren Verlängerungen sich in C schneiden mögen. Verlegt man ihre Angriffspunkte A und A′ nach C, so können beide durch eine resultierende Kraft R ersetzt werden, die in ihrer Wirkungsrichtung so lange verschoben werden möge, bis sie in B angreift. Ihre Größe läßt sich durch folgende Beziehungen errechnen:

$$R_1 = \frac{P}{\cos\left(\frac{\pi}{2} - \beta\right)} = \frac{P}{\sin\beta}$$

und ebenso

$$R_2 = \frac{Q}{\sin\gamma}.$$

Damit Gleichgewicht herrscht, muß die Bedingung:

$$R : R_1 : R_2 = \sin\alpha : \sin\alpha_2 : \sin\alpha_1$$

erfüllt sein. Es ist demnach

$$R = \frac{R_1 \sin\alpha}{\sin\alpha_2} = \frac{R_2 \sin\alpha}{\sin\alpha_1}$$

oder nach Einsetzen der Werte für R_1 bezw. R_2

$$R = \frac{P \sin\alpha}{\sin\beta \sin\alpha_2} = \frac{Q \sin\alpha}{\sin\gamma \sin\alpha_1}.$$

Der Sinussatz[1]) gibt uns in dem Dreieck A′CA die Beziehung

$$\sin\alpha : \sin\beta = \mathfrak{Sin}(p+q) : \mathfrak{Sin}\,A'C,$$
$$\sin\alpha : \sin\gamma = \mathfrak{Sin}(p+q) : \mathfrak{Sin}\,AC.$$

Daher wird

$$R = \frac{P\,\mathfrak{Sin}(p+q)}{\mathfrak{Sin}\,A'C \cdot \sin\alpha_2} = \frac{Q\,\mathfrak{Sin}(p+q)}{\mathfrak{Sin}\,AC\,\sin\alpha_1}$$

und[2])

$$\mathfrak{Sin}\,q = \mathfrak{Sin}\,A'C \cdot \sin\alpha_2$$

und

$$\mathfrak{Sin}\,p = \mathfrak{Sin}\,AC \cdot \sin\alpha_1.$$

Durch Einsetzen geht die darüberstehende Gleichung über in

$$R = \frac{P\,\mathfrak{Sin}(p+q)}{\mathfrak{Sin}\,q} = \frac{Q\,\mathfrak{Sin}(p+q)}{\mathfrak{Sin}\,p}$$

oder

$$\frac{R}{\mathfrak{Sin}(p+q)} = \frac{P}{\mathfrak{Sin}\,q} = \frac{Q}{\mathfrak{Sin}\,p}.$$

Bildet man aus den beiden zuletzt gewonnenen Beziehungen die Produktengleichung, so wird

$$P\,\mathfrak{Sin}\,p = Q\,\mathfrak{Sin}\,q,$$

d. h. unter Voraussetzung eines hyperbolischen Raumes herrscht am ungleicharmigen Hebel Gleichgewicht, wenn das Produkt aus Last und dem hyperbolischen Sinus des Lastarmes gleich dem entsprechenden Produkt aus Kraft und Kraftarm ist. Die Größe der Resultante wird

$$2R = \frac{P\,\mathfrak{Sin}(p+q)}{\mathfrak{Sin}\,q} + \frac{Q\,\mathfrak{Sin}(p+q)}{\mathfrak{Sin}\,p}$$

oder

$$2R = P\left[\frac{\mathfrak{Sin}\,p\,\mathfrak{Cof}\,q}{\mathfrak{Sin}\,q} + \mathfrak{Cof}\,p\right] + Q\left[\frac{\mathfrak{Sin}\,q\,\mathfrak{Cof}\,p}{\mathfrak{Sin}\,p} + \mathfrak{Cof}\,q\right],$$

oder da

---

[1]) Liebmann, Nichteuklidische Geometrie 2. Aufl. S. 74.
[2]) Liebmann, Nichteuklidische Geometrie 2. Aufl. S. 78 (1′).

$$\frac{P}{Q} = \frac{\mathfrak{Sin}\, q}{\mathfrak{Sin}\, p}$$

ist, so wird

$$2R = P\left[\frac{Q}{P}\,\mathfrak{Cof}\, q + \mathfrak{Cof}\, p\right] + Q\left[\mathfrak{Cof}\, q + \frac{P}{Q}\,\mathfrak{Cof}\, p\right]$$

$$R = Q\,\mathfrak{Cof}\, q + P\,\mathfrak{Cof}\, p.$$

Setzt man $P = Q$, so stimmt dieses Resultat mit den früheren [1]) überein. Für den Riemannschen Raum treten die trigonometrischen Funktionen an Stelle der hyperbolischen, in diesem wird

$$P \sin p = Q \sin q$$

und

$$R = Q \cos q + P \cos p.$$

Da die Begriffe Geschwindigkeit und Beschleunigung vom Parallelenpostulat unabhängig sind und in kleinen Gebieten stets die Euklidische Geometrie gilt, so kann man auch die Allgemeingültigkeit der Zusammensetzung von Bewegungen und Kräften nach dem Parallelogramm voraussetzen. Die Lage eines Punktes P (Abb. 15), der sich mit der Geschwindig-

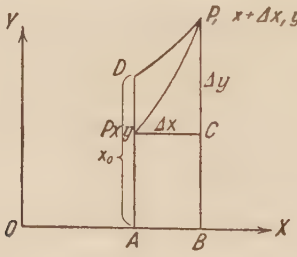

Abb. 15.

keit v fortbewegt, sei zu einer bestimmten Zeit t durch seine beiden Koordinaten x und y bestimmt. In einer kleinen Zeit beträgt dann der zurückgelegte Weg v d t. Hätte er sich im Ruhezustand befunden, so würde er unter Einwirkung der

[1]) vgl. z. B. S. 30.

Kraft K den Weg $\frac{1}{2} K\,dt^2$ — wie in der Euklidischen Geometrie[1]), denn die Bewegung findet im Unendlichkleinen statt — beschrieben haben. Auf den Punkt P, der sich mit der Geschwindigkeit v fortbewegt, möge zur Zeit t eine Kraft von der Größe K einwirken. Die beiden Bewegungen mögen so in Komponenten zerlegt werden, daß sie in dieselbe Richtung fallen, sich also addieren; der Punkt wird sich dann in der Diagonale des entstehenden unendlich kleinen Parallelogramms bewegen. Durch den Punkt P denke man sich eine Abstandslinie gelegt und die Kraft K in zwei Komponenten in Richtung der Tangente und der dazu Senkrechten zerlegt. Die zu dieser Bewegung notwendige Arbeit werde durch $Y\,dy$ (längs $x = \text{constans}$) und $X\,dx$ (längs $y = \text{constans}$) bezeichnet. Auch die Arbeit ist ein absoluter Begriff, da ihre beiden Faktoren Kraft und Weg von der Geometrie unabhängig sind. Da die zurückgelegten Wege[2]) dy und $\mathfrak{Cof}\,y\,dx$ sind und

$$\text{Kraft} = \frac{\text{Arbeit}}{\text{Weg}}$$

ist, so werden die Kraftkomponenten $\frac{X}{\mathfrak{Cof}\,y}$ und Y.

Die Komponenten der Geschwindigkeit erhält man ebenso wie in der Euklidischen Geometrie, wenn man die Strecke, an deren Endpunkten sich der Punkt zu Anfang und Ende seiner Bewegung befindet, auf die beiden oben definierten Richtungen projiziert. Zur Berechnung betrachte man das Viereck $CPDP_1$ (vgl. Abb. 15) mit den Seiten $PC = \Delta x$ $P_1C = \Delta y$ und P_1D senkrecht zu AD. Die Projektion der Strecke $P_1B = y + \Delta y$ auf AD werde mit x_0 bezeichnet. Mit Hilfe der Zuordnung von Dreiecken und Spitzecken ergibt sich[3])

$$\mathfrak{Tg}\,x_0\,\mathfrak{Cof}\,\Delta x = \mathfrak{Tg}(y + \Delta y)$$

---

[1]) Chwolson, Lehrb. der Physik Bd. 1 S. 65.

[2]) vgl. Liebmann 2. Aufl. S. 110 (1).

[3]) vgl. ebenda S. 40 u. 41.

oder

$$\mathfrak{Tg}\, x_0 = \frac{\mathfrak{Tg}(y + \Delta y)}{\mathfrak{Cof}\, \Delta x}.$$

Allgemein ist:

$$\mathfrak{Tg}(x_0 - y) = \frac{\mathfrak{Tg}\, x_0 - \mathfrak{Tg}\, y}{1 - \mathfrak{Tg}\, x_0\, \mathfrak{Tg}\, y}.$$

Da $(x_0 - y)$ eine kleine Strecke ist, kann man setzen:

$$x_0 - y = \frac{\mathfrak{Tg}\, x_0 - \mathfrak{Tg}\, y}{1 - \mathfrak{Tg}\, x_0\, \mathfrak{Tg}\, y}.$$

Setzt man für $\mathfrak{Tg}\, x_0$ seinen Wert ein, so wird

$$x_0 - y = \frac{\dfrac{\mathfrak{Tg}(y + \Delta y)}{\mathfrak{Cof}\, \Delta x} - \mathfrak{Tg}\, y}{1 - \dfrac{\mathfrak{Tg}(y + \Delta y)}{\mathfrak{Cof}\, \Delta x}\, \mathfrak{Tg}\, y}.$$

Erweitert man mit $\mathfrak{Cof}\, \Delta x$ und setzt dafür, da es sich um kleine Werte des Arguments handelt,

$$\mathfrak{Cof}\, \Delta x = 1 + \frac{1}{2}\, \Delta x^2,$$

so wird

$$x_0 - y = \frac{\mathfrak{Tg}(y + \Delta y) - \mathfrak{Tg}\, y - \dfrac{1}{2}\, \Delta x^2\, \mathfrak{Tg}\, y}{1 + \dfrac{1}{2}\, \Delta x^2 - \mathfrak{Tg}(y + \Delta y)\, \mathfrak{Tg}\, y}.$$

Nimmt man für $\mathfrak{Tg}(y + \Delta y)$ die Summenformel und ersetzt man $\mathfrak{Tg}\, \Delta y$ durch Δy, so wird

$$x_0 - y = \frac{\dfrac{\mathfrak{Tg}\, y + \Delta y}{1 + \Delta y\, \mathfrak{Tg}\, y} - \mathfrak{Tg}\, y - \dfrac{1}{2}\, \Delta^2 x\, \mathfrak{Tg}\, y}{1 + \dfrac{1}{2}\, \Delta x^2 - \dfrac{(\mathfrak{Tg}\, y + \Delta y)\, \mathfrak{Tg}\, y}{1 + \Delta y\, \mathfrak{Tg}\, y}},$$

oder wenn man nur Größen zweiter Ordnung berücksichtigt,

$$x_0 - y = \frac{\operatorname{Tg} y + \Delta y - \operatorname{Tg} y - \Delta y \operatorname{Tg}^2 y - \frac{1}{2}\Delta x^2 \operatorname{Tg} y}{1 + \Delta y \operatorname{Tg} y + \frac{1}{2}\Delta x^2 - \operatorname{Tg}^2 y - \Delta y \operatorname{Tg} y}$$

oder

$$x_0 - y = \frac{\Delta y(1 - \operatorname{Tg}^2 y) - \frac{1}{2}\Delta x^2 \operatorname{Tg} y}{1 - \operatorname{Tg}^2 y + \frac{1}{2}\Delta x^2},$$

und da

$$1 - \operatorname{Tg}^2 y = \frac{1}{\operatorname{Cof}^2 y}$$

ist,

$$x_0 - y = \frac{\frac{\Delta y}{\operatorname{Cof}^2 y} - \frac{1}{2}\Delta x^2 \operatorname{Tg} y}{\frac{1}{\operatorname{Cof}^2 y} + \frac{1}{2}\Delta x^2}$$

oder

$$x_0 - y = \frac{\Delta y - \frac{1}{2}\Delta x^2 \operatorname{Sin} y \operatorname{Cof} y}{1 + \frac{1}{2}\Delta x^2 \operatorname{Cof}^2 y};$$

also schließlich

$$x_0 - y = \left(\Delta y - \frac{1}{2}\Delta x^2 \operatorname{Sin} y \operatorname{Cof} y\right)\left(1 - \frac{1}{2}\Delta x^2 \operatorname{Cof}^2 y\right)$$

oder

$$x_0 - y = \Delta y - \frac{1}{2}\Delta x^2 \operatorname{Sin} y \operatorname{Cof} y.$$

Projiziert man auf entsprechende Weise $x + \Delta x$ auf die durch P gehende Abzisse, so wird der Wert der Projektion vermindert um x gleich

$$\Delta x \operatorname{Cof} y + \Delta x \Delta y \operatorname{Sin} y.$$

Ist v die Größe, α die Richtung der Geschwindigkeit, und setzt man

$$\frac{\Delta x}{\Delta t} = x'$$

$$\frac{\Delta y}{\Delta t} = y',$$

so erhält man nach Division durch Δt:

$$v \cos \alpha = y' - \frac{1}{2} x'^2 \operatorname{Sin} y \operatorname{Cof} y \Delta t$$

und

$$v \sin \alpha = x' \operatorname{Cof} y + x' y' \operatorname{Sin} y \Delta t.$$

Addiert man dazu die Kraftkomponenten

$$Y \text{ und } \frac{X}{\operatorname{Cof} y},$$

so wird

$$v \cos \alpha + Y \Delta t = \Delta (y') - \frac{1}{2} x'^2 \operatorname{Sin} y \operatorname{Cof} y \Delta t$$

$$v \sin \alpha + \frac{X}{\operatorname{Cof} y} \Delta t = \Delta (x' \operatorname{Cof} y) + x' y' \operatorname{Sin} y \Delta t.$$

Beim Übergang zur Grenze ergibt die Differentiation:

$$Y = y'' - \frac{1}{2} x'^2 \operatorname{Sin} y \operatorname{Cof} y$$

$$\frac{X}{\operatorname{Cof} y} = \frac{d}{dt} (x' \operatorname{Cof} y) + x' y' \operatorname{Sin} y.$$

Es ist allgemein die lebendige Kraft [1])

$$T = \frac{1}{2} m v^2$$

unabhängig von der Geometrie. Setzt man die Masse $m = 1$, so wird

$$T = \frac{1}{2} v^2 = \frac{1}{2} \left(\frac{ds}{dt}\right)^2 \text{ [2])}$$

$$T = \frac{1}{2} (x'^2 \operatorname{Cof}^2 y + y'^2).$$

---

[1]) Chwolson, Lehrbuch der Physik I S. 103.
[2]) Liebmann 2. Aufl. S. 110 (1).

Damit gehen die Gleichungen über in

$$Y = \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial y'}\right) - \frac{\partial T}{\partial y},$$
$$X = \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial x'}\right).$$

Es möge jetzt ein neues Koordinatensystem eingeführt werden, das mit dem ursprünglichen durch die Beziehung

$$x = x(p_1, p_2),$$
$$y = y(p_1, p_2)$$

verbunden sei. Multipliziert man die erste Gleichung mit $\frac{\partial x}{\partial p_1}$, die zweite mit $\frac{\partial y}{\partial p_1}$ und addiert, so wird

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial x'}\right)\frac{\partial x}{\partial p_1} + \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial y'}\right)\frac{\partial y}{\partial p_1} - \frac{\partial T}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial p_1} = X\frac{\partial x}{\partial p_1} + Y\frac{\partial y}{\partial p_1} = P_1$$

und wegen der Beziehungen zwischen den Koordinaten

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial p_1'}\right) - \frac{\partial T}{\partial p_1} = X\frac{\partial x}{\partial p_1} + Y\frac{\partial y}{\partial p_1} = P_1.$$

Auf analoge Weise erhält man

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial p_2'}\right) - \frac{\partial T}{\partial p_2} = X\frac{\partial x}{\partial p_2} + Y\frac{\partial y}{\partial p_2} = P_2.$$

Dies sind die beiden Lagrangeschen Gleichungen in der hyperbolischen Geometrie[1]). Dabei sind $P_1 dp_1$ bezw. $P_2 dp_2$ die von der Kraft geleistete Arbeit, wenn man den Punkt P von der Lage p_1 bezw. p_2 in die Lage $p_1 + dp_1$ bezw. $p_2 + dp_2$ überführt. Die rechte Seite hat demnach eine dynamische

[1]) Sie stimmen mit den entsprechenden Gleichungen in der Euklidischen Mechanik überein, die meist in der Form

$$m_1 \frac{d^2 x_1}{dt^2} = X_1 + \lambda\frac{\partial \varphi}{\partial x_1} + \mu\frac{\partial \psi}{\partial x_1} + \cdots$$

usw. zitiert werden. (Kirchhoff, Vorlesungen über mathematische Physik I S. 23.)

Bedeutung, sie ist die Arbeit dividiert durch den Weg. T ist, wie aus seiner Definition hervorgeht, eine homogene Funktion zweiter Ordnung von p_1' und p_2'. Nach dem Eulerschen Satz ist dann:

$$p_1' \frac{\partial T}{\partial p_1'} + p_2' \frac{\partial T}{\partial p_2'} = 2T.$$

Durch Differentation nach t geht die Gleichung über in

$$p_1'' \frac{\partial T}{\partial p_1'} + p_2'' \frac{\partial T}{\partial p_2'} + p_1' \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial p_1'}\right) + p_2' \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial p_2'}\right) = 2 \frac{dT}{dt}.$$

Soll ein Potential existieren, so muß

$$P_2 = -\frac{\partial V}{\partial p_1} \quad \text{und} \quad P_2 = -\frac{\partial V}{\partial p_2} \quad \text{sein.}$$

Multipliziert man die erste Lagrangesche Gleichung mit p_1', die zweite mit p_2' und addiert, so wird

$$p_1' \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial p_1'}\right) - p_1' \frac{\partial T}{\partial p_1} + p_2' \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial p_2'}\right) - p_2' \frac{\partial T}{\partial p_1} = P_1 p_1' + P_2 p_2'.$$

Unter Annahme eines Potentials läßt sich die rechte Seite schreiben:

$$-\frac{\partial V}{\partial p_1}\frac{\partial p_1}{\partial t} - \frac{\partial V}{\partial p_2}\frac{\partial p_2}{\partial t} = -\frac{dV}{dt}.$$

Ferner ergibt die differentierte Eulersche Beziehung

$$p_1' \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial p_1'}\right) + p_2' \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial p_2'}\right) = 2\frac{dT}{dt} - p_1'' \frac{\partial T}{\partial p_1'} - p_2'' \frac{\partial T}{\partial p_2'}.$$

Setzt man dies in die umgeformte Eulersche Gleichung, so wird

$$2\frac{dT}{dt} - p_1'' \frac{\partial T}{\partial p_1'} - p_2'' \frac{\partial T}{\partial p_2'} - p_1' \frac{\partial T}{\partial p_1} - p_2' \frac{\partial T}{\partial p_2} = -\frac{dV}{dt}.$$

Nun ist aber auch

$$p_1'' \frac{\partial T}{\partial p_1'} + p_2'' \frac{\partial T}{\partial p_2'} + p_1' \frac{\partial T}{\partial p_1} + p_2' \frac{\partial T}{\partial p_2} = \frac{dT}{dt}.$$

Daher wird

$$\frac{dT}{dt} = -\frac{dV}{dt}$$

oder

$$T + V = \text{konstant.}$$

Haben also die Kräfte ein Potential, so ist die Summe von lebendiger Kraft und Potential konstant. Mit Hilfe dieser Beziehung sollen die Keplerschen Gesetze abgeleitet werden.

Das Linienelement[1]) kann durch die Gleichungen[2]) (Abb. 16)

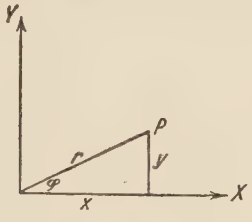

Abb. 16.

$$\mathfrak{Cof}\, r = \mathfrak{Cof}\, y\, \mathfrak{Cof}\, x$$

und

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{\mathfrak{Tg}\, y}{\mathfrak{Sin}\, x}$$

in Polarkoordinaten ausgedrückt werden und lautet dann

$$ds^2 = \mathfrak{Sin}^2 r\, d\varphi^2 + dr^2.$$

Dann geht das Integral der lebendigen Kraft

$$T = \frac{1}{2}\left(\frac{ds}{dt}\right)^2 \text{ über in } T = \frac{1}{2}(r'^2 + \varphi'^2\, \mathfrak{Sin}^2 r).$$

Tragen wir diesen Wert von T in die Lagrangeschen Gleichungen ein, so werden diese

$$r'' - \mathfrak{Sin}\, r\, \mathfrak{Cof}\, r\, \varphi'^2 = X\frac{\partial x}{\partial r} + Y\frac{\partial y}{\partial r}$$

und

---

[1]) Liebmann 2. Aufl. S. 110 (1).

[2]) Ebenda S. 78 (4′) u. (2′).

$$\frac{d}{dt}(\mathfrak{Sin}^2 r\,\varphi') = X\frac{\partial x}{\partial y} + Y\frac{\partial y}{\partial \varphi}.$$

Da die Kraft nur in Richtung des Radiusvektor wirkt, so ist die tangentielle Komponente Null, und die zweite Gleichung ergibt:

$$\frac{d}{dt}(\mathfrak{Sin}^2 r\,\varphi') = 0$$

$$\varphi'\,\mathfrak{Sin}^2 r = c.$$

Nach den Gleichungen der hyperbolischen Geometrie wird der Flächeninhalt ausgedrückt durch

$$\int df = \int\int dx\,dy\,\mathfrak{Cof}\,y = \int\int dr\,d\varphi\,\mathfrak{Sin}\,r\,^{1}).$$

Wenn wir dies mit Resultat

$$\varphi'\,\mathfrak{Sin}^2 r = c$$

vergleichen, so ist dieses der Differentialquotient des Flächenraumes, den der Radiusvektor $2r$ beschreibt. Wirkt demnach auf einen beweglichen Punkt P eine Kraft, die nach dem festen Zentrum hingerichtet ist, so beschreibt der doppelte Radiusvektor in gleichen Zeiten gleiche Räume. Dieser Flächensatz findet sein Analogon im zweiten Keplerschen Gesetz der Euklidischen Mechanik.

Um die Bahnkurve bestimmen zu können, soll zunächst die Gleichung einer Ellipse aufgestellt werden, und das gewonnene Resultat mit der aus den mechanischen Beziehungen erhaltenen Bahngleichung verglichen werden.

Nach Abb. 17 ergibt der Kosinussatz:

$$\mathfrak{Cof}\,r_1 = \mathfrak{Cof}\,r_2\,\mathfrak{Cof}\,2f - \mathfrak{Sin}\,r_2\,\mathfrak{Sin}\,2f\cos(180 - \varphi)$$

I. $$\mathfrak{Cof}\,r_1 = \mathfrak{Cof}\,r_2\,\mathfrak{Cof}\,2f + \mathfrak{Sin}\,r_2\,\mathfrak{Sin}\,2f\cos\varphi.$$

Aus der Definition der Ellipsengleichung folgt:

$$r_1 = 2a - r_2,$$

daher

---

[1]) vgl. Liebmann 2. Aufl. S. 94/95.

II. $\mathfrak{Cof}\, r_1 = \mathfrak{Cof}\,(2a - r_2) = \mathfrak{Cof}\, 2a\, \mathfrak{Cof}\, r_2 - \mathfrak{Sin}\, 2a\, \mathfrak{Sin}\, r_2$.
Die Elimination von $\mathfrak{Cof}\, r_1$ aus beiden Gleichungen ergibt nach Division durch $\mathfrak{Cof}\, r_2$:

$$\mathfrak{Cof}\, 2a - \mathfrak{Sin}\, 2a\, \mathfrak{Tg}\, r_2 = \mathfrak{Cof}\, 2f + \mathfrak{Tg}\, r_2\, \mathfrak{Sin}\, 2f \cos\varphi$$

oder

$$\mathfrak{Tg}\, r_2 = \frac{\mathfrak{Cof}\, 2a - \mathfrak{Cof}\, 2f}{\mathfrak{Sin}\, 2a + \mathfrak{Sin}\, 2f \cos\varphi} = \frac{2\,\mathfrak{Sin}\,(a+f)\,\mathfrak{Sin}\,(a-f)}{\mathfrak{Sin}\, 2a + \mathfrak{Sin}\, 2f \cos\varphi}$$

als Gleichung der Ellipse. Differentiieren wir die Gleichung, so wird

$$\frac{1}{\mathfrak{Cof}^2 r_2}\,\frac{d r_2}{d\varphi} = \frac{-2\,\mathfrak{Sin}\,(a+f)\,\mathfrak{Sin}\,(a-f)\,\mathfrak{Sin}\, 2f \sin\varphi}{[\mathfrak{Sin}\, 2a + \mathfrak{Sin}\, 2f \cos\varphi]^2}.$$

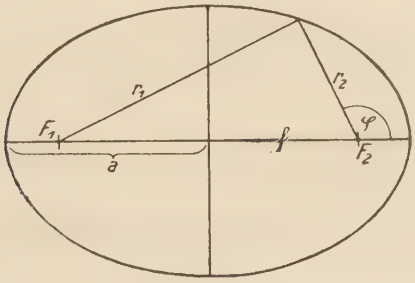

Abb. 17.

Eliminiert man aus dieser Gleichung φ mit Hilfe der Ellipsengleichung, so wird

$$\left(\frac{d r_2}{d\varphi}\right)^2 = \mathfrak{Sin}^2 r_2 \left[\frac{\mathfrak{Cof}\, r_2\, \mathfrak{Sin}\, r_2\, \mathfrak{Sin}\, 2a - \mathfrak{Cof}\, 2a\, \mathfrak{Sin}^2 r_2}{\mathfrak{Sin}\,(a-f)\,\mathfrak{Sin}\,(a+f)} - 1\right].$$

Denkt man sich das anziehende Zentrum von konzentrischen Kugeln umgeben, so ist die wirkende Newtonsche Kraft umgekehrt proportional den Oberflächen[1]). Ihre Gleichung lautete (S. 60)

$$F = \iint d r_2\, d\varphi\, \mathfrak{Sin}\, r_2.$$

[1]) vgl. z. B. Killing, Die Mechanik in den nichteuklidischen Raumformen (Schulprogramm Brilon 1883 S. 7); Gauß, Gesammelte Werke V S. 7—9 (Journal für reine und angewandte Mathematik 98 1885 S. 7.

Da im Flächensatz der doppelte Radiusvektor auftritt, so soll das Integral zwischen den Grenzen 0 und $2r_2$ berechnet werden. Dann ist

$$F = \int_0^{2\pi}\int_0^{2r} dr_2\, d\varphi\, \mathfrak{Sin}\, r_2 = 2\pi[\mathfrak{Cof}\, r_2]_0^{2r} = 2\pi[\mathfrak{Cof}\, 2r_2 - 1]$$

$$= 2\pi\left[\frac{1}{2}(e^{2r_2} + e^{-2r_2}) - 1\right] = \pi[e^{2r_2} - 2 + e^{2r_2}] = \pi\,\mathfrak{Sin}^2 r_2.$$

Das Newtonsche Potential nimmt demnach unter Fortlassung des Index in der hyperbolischen Geometrie die Form

$$V = c'\int \frac{dr}{\mathfrak{Sin}^2 r} = -c'\,\mathfrak{Ctg}\, r$$

an. Setzt man diese Werte in das Integral der lebendigen Kraft ein, und führt man wiederum Polarkoordinaten ein, so wird

$$\frac{1}{2}\left[\left(\frac{dr}{dt}\right)^2 + \left(\frac{d\varphi}{dt}\right)^2 \mathfrak{Sin}^2 r\right] - \mathfrak{Ctg}\, r = C,$$

wobei in C alle Konstanten zusammengefaßt sind. Aus dem Flächensatz folgt

$$dt = \frac{\mathfrak{Sin}^2 r}{c}\, d\varphi.$$

Eliminiert man aus beiden Gleichungen dt, so wird

$$\frac{1}{2}\left[\left(\frac{dr}{d\varphi}\right)^2 \frac{c^2}{\mathfrak{Sin}^4 r} + \frac{\mathfrak{Sin}^2 r\, c^2}{\mathfrak{Sin}^4 r}\right] - \mathfrak{Ctg}\, r = C$$

oder

$$\frac{1}{2}\left[\left(\frac{dr}{d\varphi}\right)^2 + \mathfrak{Sin}^2 r\right] = [C + \mathfrak{Ctg}\, r]\frac{\mathfrak{Sin}^4 r}{c^2},$$

$$\left(\frac{dr}{d\varphi}\right)^2 = 2[C + \mathfrak{Ctg}\, r]\frac{\mathfrak{Sin}^4 r}{c^2} - \mathfrak{Sin}^2 r$$

$$= \mathfrak{Sin}^2 r\left[2(C + \mathfrak{Ctg}\, r)\frac{\mathfrak{Sin}^2 r}{c^2} - 1\right].$$

Damit die Bahn eine Ellipse werde, sei

1. C negativ und $C = -\mathfrak{Ctg}\,2a$ und
2. $c^2 < -C + \sqrt{1 + C^2}$, d. h. es wird

$$c^2 < \mathfrak{Ctg}\,2a + \sqrt{1 + \mathfrak{Ctg}^2\,2a},$$

$$c^2 < \mathfrak{Ctg}\,2a + \sqrt{\frac{\mathfrak{Sin}^2\,2a + \mathfrak{Cof}^2\,2a}{\mathfrak{Sin}^2\,2a}}$$

$$= \frac{1}{\mathfrak{Sin}\,2a}\left[\mathfrak{Cof}\,2a + \sqrt{2\,\mathfrak{Cof}\,2a - 1}\right].$$

Setzt man noch

$$\sqrt{2\,\mathfrak{Cof}\,2a - 1} = -\mathfrak{Cof}\,2f,$$

so wird

$$c^2 = \frac{\mathfrak{Cof}\,2a - \mathfrak{Cof}\,2f}{\mathfrak{Sin}\,2a}.$$

Dann lautet aber die Differentialgleichung der Bahn

$$\left(\frac{dr}{d\varphi}\right)^2 = \mathfrak{Sin}^2 r\left[2\,(-\mathfrak{Ctg}\,2a + \mathfrak{Ctg}\,2r)\,\frac{\mathfrak{Sin}^2 r\,\mathfrak{Sin}\,2a}{\mathfrak{Cof}\,2a - \mathfrak{Cof}2f} - 1\right]$$

$$= \mathfrak{Sin}^2 r\left[\frac{-2\,\mathfrak{Sin}^2 r\,\mathfrak{Sin}\,2a\,\mathfrak{Cof}\,2a}{\mathfrak{Sin}\,2a\,(\mathfrak{Cof}\,2a - \mathfrak{Cof}\,2f)} + \frac{2\,\mathfrak{Sin}^2 r\,\mathfrak{Sin}\,2a\,\mathfrak{Cof}\,r}{\mathfrak{Sin}\,r\,(\mathfrak{Cof}\,2a - \mathfrak{Cof}\,2f)} - 1\right]$$

$$= \mathfrak{Sin}^2 r\left[\frac{2\,\mathfrak{Sin}\,r\,\mathfrak{Cof}\,r\,\mathfrak{Sin}\,2a - 2\,\mathfrak{Sin}^2 r\,\mathfrak{Cof}\,2a}{2\,\mathfrak{Sin}\,(a+f)\,\mathfrak{Sin}\,(a-f)} - 1\right],$$

also wiederum (vgl. S. 61) die Gleichung einer Ellipse.

Analog dem ersten Keplerschen Gesetz erhält man in der hyperbolischen Geometrie: Unter gewissen Bedingungen beschreibt ein Punkt unter dem Einfluß der Kraft $\frac{1}{\mathfrak{Sin}^2 r}$ eine Ellipse. Es läßt sich auch hier nachweisen, daß der Punkt, nach dem die Kraft hingerichtet ist, der eine Brennpunkt ist.

Es bleibt nun noch die Frage zu beantworten, ob bezw. welche Veränderungen das dritte Keplersche Gesetz bei An-

nahme eines konstant negativ gekrümmten Raumes erleiden wird. Der Flächensatz (S. 60) ergab die Beziehung

$$c = \int_0^T dt = 2\int \mathfrak{Sin}^2 r \, d\varphi,$$

die durch Integration in

$$T = \frac{2}{c}\int_0^{\pi} \mathfrak{Sin}^2 r \, d\varphi$$

übergeht. Bei der Ableitung der Ellipsengleichung trat folgende Relation auf (S. 61):

$$\mathfrak{Tg}\, r = \frac{\mathfrak{Cof}\, 2a - \mathfrak{Cof}\, 2f}{\mathfrak{Sin}\, 2a + \mathfrak{Sin}\, 2f \cos\varphi},$$

aus der sich

$$\mathfrak{Sin}^2 r = \frac{(\mathfrak{Cof}\, 2a - \mathfrak{Cof}\, 2f)^2}{(\mathfrak{Sin}\, 2a + \mathfrak{Sin}\, 2f \cos\varphi)^2 - (\mathfrak{Cof}\, 2a - \mathfrak{Cof}\, 2f)^2}$$

ergibt. Durch Einsetzen dieses Wertes wird

$$T = \frac{2}{c}\int_0^{\pi} \frac{d\varphi\,(\mathfrak{Cof}\, 2a - \mathfrak{Cof}\, 2f)^2}{(\mathfrak{Sin}\, 2a + \mathfrak{Sin}\, 2f \cos\varphi)^2 - (\mathfrak{Cof}\, 2a - \mathfrak{Cof}\, 2f)^2}.$$

Mit Hilfe der Partialbruchzerlegung erhält man

$$T = \frac{\mathfrak{Cof}\, 2a - \mathfrak{Cof}\, 2f}{c}\left[\int_0^{\pi} \frac{d\varphi}{\mathfrak{Sin}\, 2a + \mathfrak{Sin}\, 2f \cos\varphi - \mathfrak{Cof}\, 2a + \mathfrak{Cof}\, 2f} - \int_0^{\pi} \frac{d\varphi}{\mathfrak{Sin}\, 2a + \mathfrak{Sin}\, 2f \cos\varphi + \mathfrak{Cof}\, 2a - \mathfrak{Cof}\, 2f}\right].$$

Beide Integrale haben die Form

$$J = \int_0^{\pi} \frac{d\varphi}{a + b\cos\varphi}.$$

Setzt man darin

$$a + b\cos\varphi = \mu$$

und

$$-b\sin\varphi\,d\varphi = du,$$

so lautet das Integral

$$J = \int \frac{-du}{u\sqrt{b^2-(u-a)^2}}.$$

Führt man ferner für

$$u = \frac{1}{x} \quad \text{und} \quad du = \frac{-dx}{x^2}$$

ein, so erhält man

$$J = \int \frac{dx}{\sqrt{-x^2[(a^2-b^2)+2a\cdot x-1}},$$

in dem, wie sich durch Einsetzen leicht nachweisen läßt,

$$a^2 - b^2 > 0$$

ist. Damit ist das Integral auf eine Normalform zurückgeführt, dessen allgemeine Lösung

$$J = \frac{1}{\sqrt{a^2-b^2}}\left[\arcsin\frac{-(a^2-b^2)x+a}{\sqrt{a^2-(a^2-b^2)}}\right]$$

ist. Die Rücksubstitution ergibt

$$J = \frac{1}{\sqrt{a^2-b^2}}\left[\arcsin\frac{-a\cos\varphi+b}{a+b\cos\varphi}\right]_0^{\pi}$$

und nach Einsetzen der Grenzen

$$J = \frac{\pi}{\sqrt{a^2-b^2}}.$$

Benutzt man dieses Resultat zur Berechnung der Umlaufszeit, so wird

$$T = \frac{\mathfrak{Cof}\,2a-\mathfrak{Cof}\,2f}{2c}\left[\frac{\pi}{\sqrt{(\mathfrak{Sin}\,2a-\mathfrak{Cof}\,2a+\mathfrak{Cof}\,2f)^2-\mathfrak{Sin}^2 2f}}\right.$$
$$\left.-\frac{\pi}{\sqrt{(\mathfrak{Sin}\,2a+\mathfrak{Cof}\,2a-\mathfrak{Cof}\,2f)^2-\mathfrak{Sin}^2 2f}}\right].$$

Mit Hilfe der Beziehung

$$\mathfrak{Cof}^2 2f - \mathfrak{Sin}^2 2f = 1$$

läßt sich die Gleichung für T auch folgendermaßen schreiben

$$T = \frac{\mathfrak{Cof} 2a - \mathfrak{Cof} 2f}{c}\left[\frac{\pi}{\sqrt{2[\mathfrak{Cof} 2a - \mathfrak{Cof} 2f][\mathfrak{Cof} 2a - \mathfrak{Sin} 2a]}} - \frac{\pi}{\sqrt{2[\mathfrak{Cof} 2a - \mathfrak{Cof} 2f][\mathfrak{Cof} 2a + \mathfrak{Sin} 2a]}}\right]$$

oder

$$T = \frac{\pi\sqrt{\mathfrak{Cof} 2a - \mathfrak{Cof} 2f}}{c\sqrt{2}}\left[\frac{1}{\sqrt{\mathfrak{Cof} 2a - \mathfrak{Sin} 2a}} - \frac{1}{\sqrt{\mathfrak{Cof} 2a + \mathfrak{Sin} 2a}}\right].$$

Setzt man für c seinen Wert (S. 63)

$$c = \sqrt{\frac{\mathfrak{Cof} 2a - \mathfrak{Cof} 2f}{\mathfrak{Sin} 2a}}$$

ein und bringt beide Brüche auf einen gemeinsamen Nenner, so erhält man

$$T = \frac{\pi\sqrt{\mathfrak{Sin} 2a}}{\sqrt{2}}\left[\frac{\sqrt{\mathfrak{Cof} 2a + \mathfrak{Sin} 2a} - \sqrt{\mathfrak{Cof} 2a - \mathfrak{Sin} 2a}}{\sqrt{\mathfrak{Cof}^2 2a - \mathfrak{Sin}^2 2a}}\right].$$

Der Nenner des Bruches wird gleich 1. Ersetzt man die Argumente 2a durch ihre halben Werte a, so wird

$$T = \frac{\pi}{\sqrt{2}}\sqrt{2\,\mathfrak{Sin} 2a\,\mathfrak{Cof} 2a}\left[\sqrt{\mathfrak{Cof}^2 a + \mathfrak{Sin}^2 a + 2\,\mathfrak{Sin} a\,\mathfrak{Cof} a}\right.$$

oder

$$\left. - \sqrt{\mathfrak{Cof}^2 a + \mathfrak{Sin}^2 a - 2\,\mathfrak{Cof} a\,\mathfrak{Sin} a}\right]$$

$$T = \pi\sqrt{\mathfrak{Sin} a\,\mathfrak{Cof} a}\left[\mathfrak{Sin} a + \mathfrak{Cof} a - \mathfrak{Cof} a + \mathfrak{Sin} a\right],$$

woraus schließlich für die Umlaufszeit sich

$$T = 2\pi\,\mathfrak{Sin}^{\frac{3}{2}} a\,\mathfrak{Cof}^{\frac{1}{2}} a$$

ergibt. Auch diese Formel zeigt große Analogie mit dem entsprechenden Gesetze der Euklidischen Mechanik, denn die

Umlaufszeit hängt, wie in dieser, nur von der großen Achse ab. Für kleine Werte von a kann man setzen

$$\mathfrak{Cof}\, a = 1 + \frac{a^2}{2};\ \mathfrak{Sin}\, a = a,$$

und damit wird die Umlaufszeit

$$T = \pi \left(1 + \frac{a^2}{2}\right)^{\frac{1}{2}} a^{\frac{3}{2}}$$

oder

$$T^2 = \pi^2 \left(1 + \frac{a^2}{2}\right)^{\frac{1}{2}} a^3.$$

Sie stimmt also, wenn nur das erste Glied in Betracht gezogen wird, mit dem dritten Keplerschen Gesetz auf Euklidischer Grundlage wörtlich überein.

Würde also im Raume die hyperbolische Geometrie gelten, so würden sich die Gestirne gleichfalls in Ellipsen um die Sonnen bewegen, die in einem Brennpunkt der Kurve steht. Dagegen unterscheiden sich die beiden anderen Gesetze infolge der zugrunde gelegten Geometrien. Die Umlaufszeit wird auf Grund der Lobatchewskyschen Geometrie größer als in der Euklidischen und zwar um so mehr, je größer die große Achse der Ellipse ist. Die Abweichungen der durch die radii vectores bestrichenen Flächen sind in beiden Geometrien um so geringer, je mehr sich die Kurve der Kreisform nähert.

In einer anderen Arbeit[1]) kommt Liebmann auf ganz anderem Wege zu denselben Gesetzen. Er geht dabei aus von den Kegelschnitten im Lobatchewskyschen Raum, die er so durch Polarkoordinaten ausdrückt, daß der eine Brennpunkt mit dem Anfange des Systems zusammenfällt. Nachdem die Ableitung des Potentials nach Schering vervollständigt und geordnet ist, wird die Planetenbewegung für den Raum

---

[1]) H. Liebmann, Die Kegelschnitte und die Planetenbewegung im nichteuklidischen Raum (Berichte der Kgl. Sächs. Ges. d. Wissens, math. phys. Klasse) Bd. 54 1902 S. 393—424.

der sphärischen Geometrie abgeleitet, die gleichfalls in einer Ellipse verläuft. Die Untersuchung für den pseudosphärischen Raum zeigt die vorhin abgeleiteten Resultate. In der ersten Auflage[1]) seiner nichteuklidischen Geometrie kommt Liebmann, ausgehend von hydrodynamischen Betrachtungen, zu dem Ergebnis, daß im hyperbolischen Raum drei Potentiale möglich sind, je nachdem die Kraft senkrecht zur Kugelfläche, zur Abstandsfläche oder zur Grenzkugel wirkt und diese für kleine Werte in das Newtonsche Potential übergehen[2]).

Im Jahre 1873 hatte Bertrand[3]) bewiesen, daß es, wenn $\varphi(r)$ die Größe der Anziehung ist, die auf einen Punkt im Abstand r ausgeübt wird, nur zwei Anziehungsgesetze gibt, bei denen die Bahnkurve geschlossen ist. Seine Untersuchung führte ihn zu der Differentialgleichung

$$\varphi(r) = \frac{k^2}{r^2}\left(\frac{1}{r} + \frac{d^2\frac{1}{r}}{dQ^2}\right),$$

wobei Q und r die Koordinaten des beweglichen Punktes sind, wenn das Anziehungszentrum sich im Anfange des Koordinatensystems befindet. Setzt man für

$$2 = \frac{1}{r}\, r^2\, \varphi(r) = \psi(z)$$

ein, so hat die entstehende Funktionalgleichung

$$\psi(z) = k^2\left(\frac{d^2 z}{dQ^2} + z\right)$$

zwei Lösungen, die den Werten

$$\psi(z) = A, \text{ also } \varphi(r) = \frac{A}{r^2}$$

---

[1]) Liebmann, Nichteuklidische Geometrie 1. Aufl. 1905 S. 226/27.

[2]) Die Ausdehnung der Keplerschen Gesetze auf die Kugel wurde von Neumann (Ausdehnung der Keplerschen Gesetze auf den Fall, daß die Bewegung auf einer Kugelfläche stattfindet, Berichte der Kgl. Sächs. Ges. d. Wissens, math.-phys. Klasse Bd. 38 1866 S. 1/2) abgeleitet.

[3]) Bertrand, Théorème relatif au mouvement d'un point, attiré vers un centre fixe (Comptes rendus 77 p. 849—853).

und

$$\psi(z) = Az^{-3}, \text{ also } \varphi(z) = Ar,$$

d. h. dem Newtonschen bezw. dem Elastischen Potential entsprechen.

Um einen analogen Satz auf Grund hyperbolischer Geometrie aufstellen zu können, geht man am zweckmäßigsten vom Integral der lebendigen Kraft aus, das in Polarkoordinaten die Form

$$\left(\frac{dr}{dt}\right)^2 + \mathfrak{Sin}^2 \left(\frac{d\varphi}{dt}\right)^2 + 2V = 2C$$

annimmt.

Die Lagrangeschen Gleichungen (S. 57) lassen sich dann schreiben:

$$1. \quad \frac{d^2r}{dt^2} - \mathfrak{Sin}\, r\, \mathfrak{Cof}\, r \left(\frac{d\varphi}{dt}\right)^2,$$

und dies ist, wie ein Vergleich mit der darüber stehenden Gleichung zeigt

$$= -\frac{dV}{dr} = -\varphi(r)$$

und

$$2. \quad \frac{d}{dt}\left(\mathfrak{Sin}^2 r \frac{d\varphi}{dt}\right) = 0,$$

die den Flächensatz

$$\mathfrak{Sin}^2 r \frac{d\varphi}{dt} = c$$

ergibt. Ferner ist

$$\frac{dr}{dt} = \frac{dr}{d\varphi} \cdot \frac{d\varphi}{dt} = \frac{dr}{d\varphi} \frac{c}{\mathfrak{Sin}^2 r} = -c \frac{d}{d\varphi} \mathfrak{Ctg}\, r$$

und

$$\frac{d^2r}{dt^2} = \frac{-c^2}{\mathfrak{Sin}^2 r} \frac{d^2 \mathfrak{Ctg}\, r}{d\varphi^2}.$$

Dadurch wird

$$1. \quad \frac{-c^2}{\mathfrak{Sin}^2 r} \frac{d^2 \mathfrak{Ctg}\, r}{d\varphi^2} - \mathfrak{Sin}\, r\, \mathfrak{Cof}\, r \frac{c^2}{\mathfrak{Sin}^4 r} = -\varphi(r).$$

Setzt man

$$\mathfrak{Ctg}\, r = z, \quad \mathfrak{Sin}^2 r\, \varphi(r) = \psi(z),$$

so erhält man

$$c^2 \frac{d^2 z}{d\varphi^2} + c^2 z = \psi(z)$$

oder

$$\psi(z) = c^3 \left(\frac{d^2 z}{d\varphi^2} + z \right).$$

Diese Gleichung hat nach Bertrand die beiden Lösungen:

$$\text{I.} \quad \psi(z) = A; \qquad \text{II.} \quad \psi(z) = A z^{-3}$$

oder

$$\text{I.} \quad \psi(r) = \frac{A}{\mathfrak{Sin}^2 r}.$$

Daraus folgt

$$V = \int \varphi(r)\, dr = -\frac{A}{\mathfrak{Ctg}\, r}$$

das Newtonsche Potential;

$$\text{II.} \quad \varphi(r) = \frac{A}{\mathfrak{Sin}^2 r\, \mathfrak{Ctg}^3 r} = \frac{d\, \mathfrak{Sin}\, r}{\mathfrak{Cof}^3 r}$$

$$V = \int \varphi(r)\, dr = A \int \frac{\mathfrak{Sin}\, r\, dr}{\mathfrak{Cof}^3 r} = \frac{A}{2} \mathfrak{Tg}^2 r,$$

das dem elastischen Potential entspricht. Für diesen Fall nimmt es die Form an:

$$V = \frac{A}{2} \mathfrak{Tg}^2 r,$$

und der Satz der lebendigen Kraft geht über in:

$$\left(\frac{dr}{dt} \right)^2 + \mathfrak{Sin}^2 r \left(\frac{d\varphi}{dt} \right)^2 + A\, \mathfrak{Tg}^2 r = 2C.$$

Aus dem Flächensatz ergibt sich

$$dt = \frac{\mathfrak{Sin}^2 r \, d\varphi}{c},$$

und damit geht die Kurvengleichung über in:

$$\left(\frac{dr}{d\varphi}\right)^2 = \mathfrak{Sin}^2 r \left[(2C - A\,\mathfrak{Tg}^3 r)\frac{\mathfrak{Sin}^2 r}{c^2} - 1\right].$$

Diese Gleichung ist der früher erhaltenen Ellipsengleichung formell gleich gebaut (S. 63). Es läßt sich daher folgern: Im nichteuklidischen hyperbolischen Raum schwingt ein Punkt unter der Einwirkung des Potentials $\frac{A}{2}\mathfrak{Tg}^2 r$ in einer Ellipse, wenn zwischen den Konstanten A, C, c bestimmte Beziehungen bestehen. Sind diese nicht erfüllt, so können auch leicht andere Bahnkurven entstehen. Setzt man nämlich in der Gleichung der lebendigen Kraft[1])

$$\frac{dr}{dt} = -c\frac{d}{d\varphi}\mathfrak{Ctg}\, r,$$

$$\mathfrak{Ctg}\, r = x \quad \text{folglich} \quad \mathfrak{Sin}^2 r = \frac{1}{x^2 - 1},$$

so erhält man

$$c^2\left[\left(\frac{dx}{d\varphi}\right)^2 + (x^2 - 1)\right] + \frac{A}{x^2} = 2C.$$

Diese Gleichung läßt sich aber auf die Form

$$x^2\left(\frac{dx}{d\varphi}\right)^2 + (x^2 - a^2)(x^2 - b^2) = 0$$

bringen, wenn

$$a^2 = \frac{1}{2}\left[1 + \frac{2C}{c^2} + \sqrt{\left(1 + \frac{2C}{c^2}\right)^2 - \frac{4A}{c^2}}\right]$$

und

$$b^2 = \frac{1}{2}\left[1 + \frac{2C}{c^2} - \sqrt{\left(1 + \frac{2C}{c^2}\right)^2 - \frac{4A}{c^2}}\right]$$

[1]) Liebmann, Nichteuklidische Geometrie 1. Aufl. 1905 S. 238—240.

ist. Nun ist

$$d\varphi = \frac{x\,dx}{\sqrt{(x^2 - a^2)(b^2 - x^2)}}.$$

Bezeichnet man die Integrationskonstanten mit ψ und setzt man $x^2 = x_0$

$$x\,dx = \frac{1}{2}\,dx_0,$$

so geht das Integral über in:

$$\varphi - \psi = \frac{1}{2}\int \frac{dx_0}{\sqrt{(x_0 - a^2)(b^2 - x_0)}},$$

dessen Lösung

$$\varphi - \psi = \arcsin \sqrt{\frac{b^2 - x_0}{b^2 - a^2}}$$

ist. Dann wird

$$\sin^2(\varphi - \psi) = \frac{b^2 - x^2}{b^2 - a^2}$$

$$x^2 = b^2[1 - \sin^2(\varphi - \psi) + a^2 \sin^2(\varphi - \psi)].$$

Es läßt sich dann allgemein nachweisen, daß die Gleichung für

$b^2 > 1$ eine Ellipse,

$b^2 = 1$ einen Kreis,

$b^2 < 1$ eine Hyperbel mit innerem Mittelpunkt darstellt.

Alle Sätze, die im Unendlichkleinen gelten, wie das Hamiltonsche Prinzip und das Gesetz der virtuellen Verschiebungen, bedürfen keiner besonderen Beweisführung [1]).

Es läßt sich also zusammenfassend sagen: solange man mechanische Vorgänge in einem unendlich kleinen Gebiet betrachtet, übt die Geometrie keinen Einfluß auf die Gleichungen und die erfolgten Vorgänge aus. Daher bleiben alle Differentialgleichungen wie das Gesetz der virtuellen Verschiebungen ungeändert, und die Tatsachen, die daraus hervorgehen. Auch

[1]) vgl. S. 35 u. 39.

alle Folgerungen, die sich aus der Zusammensetzung und Zerlegung von Kräften, Geschwindigkeiten und Bewegungen überhaupt ergeben, müssen bei Änderung der Geometrie bestehen bleiben, ebenso wie das d'Alembertsche Prinzip. Dagegen muß das Hebelgesetz, das sich über endliche Strecken erstreckt, je nach der benutzten Geometrie eine andere Gestalt annehmen. Die den euklidischen Potentialen entsprechenden nichteuklidischen geben bei ihrer Anwendung so geringe Abweichungen von den Keplerschen Gesetzen, daß man mit ihrer Hilfe keinen Schluß auf die wirkliche Natur des Raumes machen darf. Dabei ist der Zusammenhang zwischen den physikalischen Gesetzen in Räumen konstanter negativer oder positiver Krümmung stets derart, daß an Stelle der hyperbolischen Funktionen der Strecken in dieser die trigonometrischen Funktionen treten, während die Winkelfunktionen ungeändert bleiben.

Auf Grund mechanischer Betrachtungen allein kann demnach über die wahre Natur des Raumes nicht entschieden werden. Aber auch die geometrischen Untersuchungen, die von allen denen angestellt wurden, die sich mit nichteuklidischer Geometrie beschäftigt haben, führten ebensowenig zu einem befriedigenden Ergebnis wie die auf Grund astronomischer Methoden vorgenommenen Berechnungen.

Schluß und Ausblick.

Rückblickend kann man demnach sagen: Der Aufbau einer nichteuklidischen Mechanik, der im vergangenen Jahrhundert zuerst von einzelnen Gelehrten ausgeführt worden ist, hat zu Widersprüchen nicht geführt. Auch Untersuchungen und Messungen geben keine Anhaltspunkte, die dazu dienen, einer der drei Geometrien vor den anderen den

Vorzug zu geben. Selbst für mehrdimensionale Räume haben die Untersuchungen, die sich nur auf beschränkte Gebiete erstreckten, widerspruchslose Ergebnisse aufgezeigt. Ebensowenig wie die Messungen ein abschließendes Urteil über die wahre Gestalt des Raumes gezeitigt haben, können die Philosophen Anspruch darauf machen, einer bestimmten Raumform zu allgemeiner Anerkenntnis verholfen zu haben. Die Untersuchung über die Gültigkeit der Raumform auf logischem Wege gehört in das Gebiet der Philosophie, nicht der Mathematik und Physik.

Die Bedeutung der nichteuklidischen Geometrie für die Mechanik ist, vom praktischen Standpunkt der Anwendbarkeit aus beurteilt, sehr gering, da für uns die Euklidische Mechanik, selbst wenn unser Raum einen von Null abweichenden Krümmungsradius hätte, noch hinreichend genaue Resultate liefern würde. Nur wenn wir imstande sein werden, mit vollkommeneren Apparaten Messungen über noch größere Strecken vorzunehmen, wird vielleicht einem kommenden Geschlecht die Lösung der Frage nach der Gestalt unseres Raumes vorbehalten sein.

Dagegen haben 1913 die Untersuchungen Byks[1]) über die den Atomen innewohnenden Eigenschaften eigenartige Resultate ergeben. Er faßt sie selbst folgendermaßen zusammen: „Wenn man die empirischen Gesetze der Elektronenschwingungen im Atom analog den Keplerschen Gesetzen formuliert und nach Newtons Methode aus ihnen das zugehörige Potential herleitet, so wird man zu der Verallgemeinerung des elastischen Kraftgesetzes für Räume konstanter negativer Krümmung geführt. . . . Die Atome erscheinen dann als Ausnahmegebiete konstanter negativer Krümmung . . ., die Elektronen als solche positiver Krümmung innerhalb des Vakuums mit der Krümmung Null".

---

[1]) Byk, Zur Theorie der elektrischen und chemischen Naturkräfte (Annalen der Physik 4. Folge Bd. 42 1913 S. 1417—1453).

Damit erweist sich die Aufstellung einer nichteuklidischen Physik nicht nur als logische Spekulation oder mathematische Spielerei[1]), sondern als in einem — wenn auch beschränkten — Gebiet bestehend.

---

[1]) vgl. Planck, Acht Vorlesungen über theoretische Physik S. 117: der der nichteuklidischen Geometrie jede reelle physikalische Bedeutung abspricht, da sie bisher nur für die reine Mathematik in Betracht kommt.

Robert Noske, Borna-Leipzig, Großbetrieb für Dissertationsdruck.

Lebenslauf.

Am 23. Mai 1885 wurde ich, Elisabeth Paderstein, in Berlin als Tochter des Kaufmanns Georg Paderstein geboren. Ich bin evangelischer Konfession und preußischer Staatsangehörigkeit. Ich besuchte in Berlin die Höhere Mädchenschule und das Lehrerinnenseminar und war mehrere Jahre als Lehrerin tätig. Von Oktober 1909 bis Oktober 1910 besuchte ich die „Gymnasialkurse für Frauen“ zu Berlin und bestand Herbst 1910 am Andreas-Realgymnasium zu Berlin die Reifeprüfung. Ich studierte in Berlin und Freiburg i. Br. Mathematik und Naturwissenschaften.

Meine Lehrer waren die Herren Professoren und Dozenten in Berlin: Börnstein †, Diels, Erdmann, Fischer, Fuchs, Knoblauch †, Knopp, Kurlbaum, Lampe, Lasson, Lehmann-Filhès, Lichtenstein, Liebisch, Nernst, Planck, Regener, Riehl, Rubens, Schwarz, Stumpf, Warburg; in Freiburg: Deecke, Gattermann, Heffter, Loewy, Stickelberger.

Allen diesen meinen verehrten Lehrern sowie Herrn Geheimrat Professor Dr. Wangerin bin ich zu großem Dank verpflichtet.